PENURUNAN PERSAMAAN GELOMBANG BERTIPE KP DENGAN KASUS KHUSUS PERSAMAAN AB

Oleh

Mashuri, Rina Reorita
Jurusan Matematika FMIPA UNSOED
Mashuri_unsoed@yahoo.com

ABSTRAK

Paper ini membahas tentang penurunan persamaan bertipe KP. Persamaan KP dikenal sebagai persamaan gelombang dengan dua diminesi ruang. Dengan menggunakan penurunan persamaan KP untuk persamaan gelombang order kedua yang paling sederhana, kita turunkan persamaan bertipe KP yang mempunyai kasus khususnya adalah persamaan AB yakni persamaan gelombang satu arah dan merupakan perbaikan dari persamaan KdV. Relasi dispersi dari model akan dibandingkan dengan model persamaan bertipe KP yang lain. Simulasi dari persamaan bertipe KP akan dilakukan dengan mengambil gelombang monokromatik sebagai input signal.

ABSTRACT

In this paper we discuss about derivation of KP type equation. The KP type equation is known as a wave equation with two spatial dimensions. By using the derivation of KP equation for the simplest second order wave equation, we derive KP-Type equation with its special case is AB equation which is the unidirectional wave equation and improving of KdV equation. The dispersion relation of the model will be compared by the other model of KP. The simulation of The KP-Type will be done by choosing a monochromatic wave as a signal input.

PENDAHULUAN

Persamaan bertipe KP dikenalkan pertama kali pada tahun 1997 oleh Kadomtsev–Petviashvilli sebagai perumuman dari persamaan Korteweg de Vries (KdV). Perbedaan antara persamaan KP dan KdV adalah dalam hal dimensi ruangnya [Johnson, 1997]. Persamaan KP mempunyai dua dimensi ruang, oleh karena itu kadang-kadang persamaan KP disebut juga persamaan gelombang dengan multi arah rambat. Hal ini dikarenakan gelombang yang menggunakan persamaan ini merambat kerah sumbu x dan juga kearah sumbu y.

Sementara itu, persamaan AB merupakan persamaan gelombang baru bertipe KdV. Persamaan ini diturunkan pada tahun 2007 oleh Groosen dan Andonowati. Persamaan ini merupakan perbaikan dari persamaan bertipe KdV dan dapat dinterpretasikan sebagai persamaan KdV berode tinggi untuk gelombang diatas kedalaman hingga serta pada pendekatan tertentu persamaan ini menjadi persamaan KdV [Groosen, 1998; Groosen dan Andonowati, 2007]. Suku nonlinier dari persamaan ini juga diperbaiki untuk mengakomodir pengaruh interaksi-interaksi gelombang pendek. Persamaan AB diberikan sebagai berikut

$$\partial_t \eta = -\sqrt{g}A[\eta + \frac{1}{2}A(\eta A\eta) - \frac{1}{4}(A\eta)^2 + \frac{1}{2}B(\eta B\eta) + \frac{1}{4}(B\eta)^2] \qquad (1)$$

Dimana η menyatakan elevasi gelombang, A = $\frac{\partial_x C}{\sqrt{g}}$ dan B = $\sqrt{g}C^{-1}$ adalah operator pseudo diferensial dengan symbol Fourier $\hat{C}(k) = \frac{\Omega(k)}{k}$, $\Omega(k) = c_0 k\sqrt{\frac{\tanh(kh_0)}{kh_0}}$, $c_0 = \sqrt{gh_0}$, g dan h_0 berturut-turut adalah percepatan gravitasi dan kedalaman kolam.

Dalam makalah ini, persamaan bertipe KP akan diturunkan menggunakan penurunan gelombang yang paling sederhana. Berbeda dengan KP yang ada, pada paper ini persamaan KP yang diturunkan mempunyai kasus khususnya persamaan AB. Selanjutnya akan dikaji perbedaan relasi dispersi dari persamaan yang dihasilkan dengan persamaan KP yang lain, yakni relasi yang menghubungkan antara frekwensi dan bilangan gelombangnya. Disamping itu simulasi juga akan dilakukan untuk gelombang monokromatik yakni gelombang sinusoidal dengan bilangan gelombang dan frekwensi tunggal.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian teoritis yang aplikatif. Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika FMIPA unsoed dengan memanfaatkan software Maple dan Matlab sebagai alat bantu untuk membuat program dari hasil solusinya.

Terlebih dahulu akan dibahas tentang penurunan persamaan KP dari persamaan gelombang berdorde dua yang telah dilakukan oleh Kadomtsev–Petviashvilli. Berbeda dengan persamaan KP yang lain, kasus khusus persamaan gelombang satu arahnya diambil persamaan baru bertipe KdV yaitu persamaan AB diturunkan oleh Groesen and Andonowati (2007). Selanjutnya relasi dispersi yang dihasilkan akan di bandingkan dengan relasi dispersi persamaan KP yang lain untuk melihat kesesuaian asumsi yang harus dipenuhi dalam persamaan KP. Simulasi akan dilakukan untuk inputnya adalah gelombang monokromatik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Penurunan Persamaan Bertipe KP

Dalam bagian ini terlebih dahulu akan diturunkan persamaan bertipe KP. Penurunan persamaan KP dimulai dari persamaan gelombang berorde dua yang paling sederhana berikut ini .

$$\partial_t^2 \eta = c_0^2 \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 \right) \eta \qquad (2)$$

Dengan $c_0 = \sqrt{gh}$ dan relasi dispersinya

$$\omega^2 = c_0^2 (k_x^2 + k_y^2) \qquad (3)$$

Yang menghubungkan frekwensi gelombang ω dengan bilangan-bilangan gelombang gelmbang harmonic dalam arah x dan y. Gelombang satu arah rambat dengan hanya arah rambat x saja diberikan oleh

$$\partial_t^2 \eta = c_0^2 \partial_x^2 \eta \qquad (4)$$

Persamaan (4) dapat ditulis kembali menjadi

$$\left(\partial_t - c_0 \partial_x \right) \left(\partial_t + c_0 \partial_x \right) \eta = 0 \qquad (5)$$

Persamaan (5) menyatakan persamaan gelombang yang merambat kearah kiri dan kanan. Salah satu arahnya diberikan oleh

$$\partial_t \eta + c_0 \partial_x \eta = 0 \qquad (6)$$

yang mempunyai relasi disperse $\omega = c_0 k_x$.

Sementara itu gelombang multi arah yang merambat hanya pada satu arah rambat x mempunyai asumsi bahwa $|k_y| << |k_x|$, oleh karena itu relasi dispersinya diberikan oleh persamaan

$$\omega = c_0 k_x \sqrt{1 + (k_y / k_x)^2}$$
$$\approx c_0 k_x \left(1 + \frac{1}{2} \frac{k_y^2}{k_x^2} \right) = c_0 \left(k_x + \frac{1}{2} \frac{k_y^2}{k_x} \right) \qquad (7)$$

Persamaan (7) dapat ditulis kembali dalam bentuk persamaan diferensial sebagai berikut

$$\partial_t \eta = -c_0 (\partial_x \eta + \partial_x^{-1} \partial_y^2 \eta) \qquad (8)$$

Oleh karena itu, kita peroleh persamaan berikut

$$\partial_x \left[\partial_t \eta + c_0 \partial_x \eta \right] + \frac{c_0}{2} \partial_y^2 \eta = 0 \qquad (9)$$

Persamaan (9) dalam literatur sering disebut persamaan standar bertipe yang kasus khususnya adalah persamaan gelombang $\partial_t \eta + c_0 \partial_x \eta = 0$.

Dengan cara yang sama, Jika diambil relasi disperse dan persamaan gelombang nonliniernya dengan arah x adalah

$$\partial_t \eta + \partial_x \eta + \frac{1}{6} \partial_x^3 \eta + \frac{3}{2} \eta \partial_x \eta = 0 \qquad (10)$$

maka dihasilkan persamaan standar KP berikut

$$\partial_x \left[\partial_t \eta + \partial_x \eta + \frac{1}{6} \partial_x^3 \eta + \frac{3}{2} \eta \partial_x \eta \right] + \frac{c_0}{2} \partial_y^2 \eta = 0 \qquad (11)$$

Sementara jika persamaan gelombang nonliniernya adalah persamaan AB yaitu

$$\partial_t \eta = -\sqrt{g} A[\eta + \frac{1}{2} A(\eta A \eta) - \frac{1}{4} (A\eta)^2 + \frac{1}{2} B(\eta B \eta) + \frac{1}{4} (B\eta)^2]$$

maka persamaan standar KPnya adalah

$$\partial_x\left[\partial_t\eta+\sqrt{g}A[\eta+\frac{1}{2}A(\eta A\eta)-\frac{1}{4}(A\eta)^2+\frac{1}{2}B(\eta B\eta)+\frac{1}{4}(B\eta)^2]\right]+\frac{c_0}{2}\partial_y^2\eta=0. \qquad (12)$$

Persamaan terakhir (12) menyatakan persamaan KP yang selanjutnya disebut persamaan KP_{AB}.

2. Relasi Dispersi Persamaan KP_{AB}

Dalam bagian ini akan dibahas tentang relasi disperse persamaan bertipe KP dengan persamaan KdV sebagai kasus khususnya dan (11) dan persamaan KP_{AB} dalam (12). Untuk persamaan bertipe KP dengan KdV (11), relasi dispersinya dihasilkan dengan mengambil bagian linier dari persamaan yaitu

$$\partial_x\left[\partial_t\eta+\partial_x\eta+\frac{1}{6}\partial_x^3\eta\right]+\frac{c_0}{2}\partial_y^2\eta=0 \qquad (13)$$

Persamaan (3) dapat ditulis kembali sebagai

$$\partial_x\partial_t\eta+\partial_x\partial_x\eta+\frac{1}{6}\partial_x^4\eta+\frac{c_0}{2}\partial_y^2\eta=0 \qquad (14)$$

Dengan memilih gelombang monokromatik $\eta=ae^{i(k_x x+k_y y-\omega t)}+c.c$, diperoleh

$$k_x\omega-k_x{}^2+\frac{1}{6}k_x{}^4-\frac{c_0}{2}k_y{}^2=0 \qquad (15)$$

Relasi disperse persamaan yang dihasilkan dari persamaan (15) adalah

$$\omega=k_x-\frac{1}{6}k_x{}^3+\frac{c_0}{2}\frac{k_y{}^2}{k_x}$$

dengan $c_0=\sqrt{gh_0}$.

Dengan cara yang sama dilakukan untuk persamaan KP_{AB} (12), relasi disperse dari KP_{AB} diperoleh sebagai berikut.

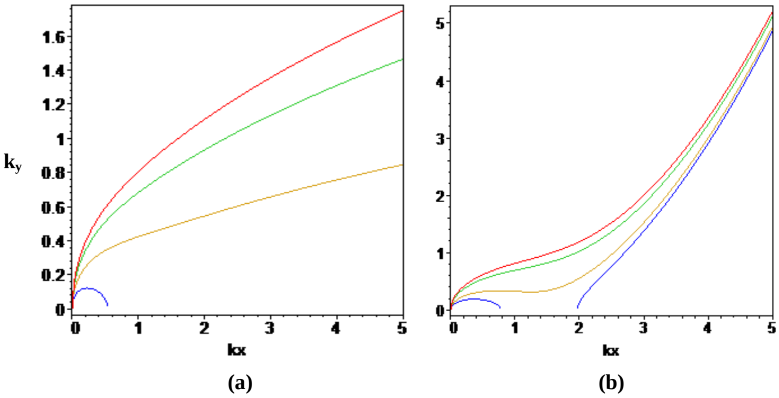
$$k_x\omega-\sqrt{g}k_x{}^2\frac{\Omega(k_x)}{\sqrt{g}k_x}-\frac{c_0}{2}k_y{}^2=0$$

$$k_x\omega=k_x\ \ \Omega(k_x)+\frac{c_0}{2}k_y{}^2$$

Sehingga diperoleh

$$\omega = \Omega(k_x) + \frac{c_0}{2}\frac{k_y^2}{k_x} \quad (14)$$

Gambar 1 menyatakan relasi disperse antara bilangan gelombang k_x dan k_y untuk bertipe KP dengan KdV dan persamaan KP_{AB} untuk berbagai ω, ω =3.14 (merah), ω =2.5 (hijau), ω =1.2 (kuning), ω =3.14 (biru).

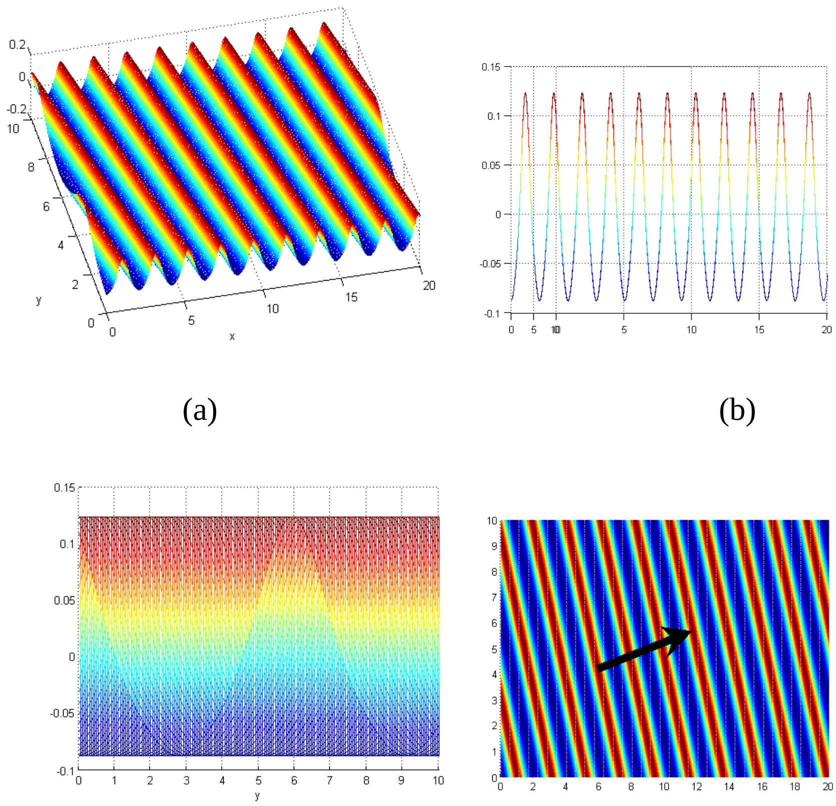


Gambar 1. Relasi disperse antara bilangan gelombang k_x dan k_y untuk KP_{AB} (a) dan KP dengan KdV (b).

Dari Gambar 1 menunjukkan bahwa relasi disperse persamaan KP_{AB} lebih baik dari pada persamaan KP dengan KdV dalam hal sifat bilangan gelombangnya. Untuk persamaan KP_{AB} untuk berbagai bilangan gelombang k_x maka k_y lebih kecil dibandingkan persamaan KP dengan KdV.

3. Simulasi Gelombang Monokromatik untuk persamaan KP_{AB}

Pada bagian ini akan dilakukan simulasi gelombang yang dihasilkan dari persamaan KP_{AB} dimana inputnya menggunakan gelombang monokromatik. Parameter yang diambil adalah $k_x = 3$; $k_y = 1$; a = 0.1m ; h = 5 m ; g = 9.8 m/s^2 . Profile pada posisi awal gelombang berjalan adalah. Gelombang ini dihasilkan dengan menggunakan solusi asimptotik yang dilakukan oleh Mashuri , 2010 dan Marwan , 2006.



(a) (b)

(c) (d)

Gambar 2. Profil gelombang pada t = 0 (a), terlihat dari sisi sumbu x (b), sumbu y (c), dan arah rambat (d).

Dari gambar 2 terlihat bahwa gelombang bergerak dengan arah rambat sumbu x dan sumbu y. Persamaan ini juga dapat digunakan untuk melihat penjalaran gelombang yang sesungguhnya di lapangan.

KESIMPULAN

Dalam makalah ini telah dibahas penurunan persamaan gelombang multi arah bertipe KP yang kasus khususnya adalah persamaan AB. Persamaan yang dihasilkan memberikan relasi dispersi yang lebih baik dari persamaan KP sebelumnya dalam hal hubungan antara bilangan-bilangan gelombangnya. Dengan persamaan ini juga kondisi gelombang dilapangan dapat digambarkan secara jelas.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penelitian ini didanai oleh DIPA Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi dengan pada skema penelitian Fundamental dengan nomer kontrak Nomor DIPA - 023.04.1.673453/2015.

DAFTAR PUSTAKA

E. van Groesen, (1998) ,Wave groups in uni-directional surface wave models, J. Engineer. Math. 34 (1998), 215-226.

E. van Groesen and Andonowati, (2007) Variational derivation of KdV-type models for surface water waves, J. Phys. Lett. A. 366, 195-201.

Marwan, (2006), Surface water waves: theory, numerics, and its applications on the generation of extreme waves, PhD thesis, Institut Teknologi Bandung.

Mashuri, Lie S Liam, Andonowati, N. Sariningsih, (2010), On nonlinear bi- chromatic wave group distortions, Far East Journal of Applied Mathematics, 49, Number 2, 85-106.

R.S. Johnson, (1997), A modern introduction to the mathematical theory of water waves, Cambridge Univ. Press.