

Kontribusi **FMIPA UNSOED** dalam Pengembangan Keilmuan yang Mendukung Sumber Daya Perdesaan dan Kearifan Lokal

Agus Sugandha,
Agung Prabowo, Sehah, Jajang,
Idha Sihwaningrum, Sandi Setiawan,
Kartika Sari, Sunardi, Wihantoro, Aris Haryadi,
Agung Bambang Setio Utomo, Parmin Lumban Toruan,
Evi Yulianti dan Mashadi

Disusun dalam Rangka Peringatan Dies Natalis ke-6
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jenderal Soedirman
24 Oktober 2020

Kontribusi FMIPA UNSOED dalam Pengembangan Keilmuan yang Mendukung Sumber Daya Perdesaan dan Kearifan Lokal

**Disusun dalam Rangka Peringatan Dies Natalis ke-6
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jenderal Soedirman
24 Oktober 2020**

Agus Sugandha, Agung Prabowo, Sehah, Jajang
Idha Sihwaningrum, Sandi Setiawan,
Kartika Sari, Sunardi, Wihantoro,
Aris Haryadi, Agung Bambang Setio Utomo,
Parmin Lumban Toruan, Evi Yulianti dan Mashadi.



Penerbit
Universitas Jenderal Soedirman
2020

**Kontribusi FMIPA UNSOED dalam Pengembangan Keilmuan yang Mendukung Sumber
Daya Perdesaan dan Kearifan Lokal**

© 2020 Universitas Jenderal Soedirman

Cetakan Kesatu, Desember 2020

Hak Cipta dilindungi Undang-undang

All Right Reserved

Penulis:

Agus Sugandha, Agung Prabowo, Sebah, Jajang
Idha Sihwaningrum, Sandi Setiawan,
Kartika Sari, Sunardi, Wihantoro,
Aris Haryadi, Agung Bambang Setio Utomo,
Parmin Lumban Toruan, Evi Yulianti dan Mashadi

Editor Isi:

Drs. Sunardi, M. Si. (Dekan FMIPA UNSOED)

Editor Bahasa:

Aldi Aditya, S.Hum., M.Hum.

Diterbitkan oleh:

UNIVERSITAS JENDERAL SOEDIRMAN
Gd. BPU Percetakan dan Penerbitan (UNSOED Press)
Telp. (0281) 626070
Email: unsoedpress@unsoed.ac.id



Anggota

Asosiasi Penerbit Perguruan Tinggi Indonesia

Nomor : 003.027.1.03.2018

vii + 62 hal., 21 x 29 cm

ISBN : 978-623-6783-15-3

*Dilarang mengutip dan memperbanyak tanpa izin tertulis dari penerbit,
sebagian atau seluruhnya dalam bentuk apapun, baik cetak,
photoprint, microfilm dan sebagainya.*

PENGANTAR DEKAN FMIPA

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT. yang dengan kehendak-Nya maka buku dies natalis ini dapat terwujud. Untuk keempat kalinya, peringatan Dies Natalis ke-6 FMIPA Unsoed dimeriahkan dengan penerbitan sebuah buku. Buku yang mengusung judul “*Kontribusi FMIPA UNSOED dalam Pengembangan Keilmuan yang Mendukung Sumber Daya Perdesaan dan Kearifan Lokal*” merupakan karya para dosen pada dua dari tiga jurusan yang ada di FMIPA Unsoed yaitu Matematika dan Fisika. Buku ini dipersembahkan sebagai kado untuk Dies Natalis ke-6 FMIPA Unsoed pada 24 Oktober 2020.

Buku ini memuat empat buah tulisan yang disusun oleh tiga orang dosen Matematika dan seorang dosen Fisika. Secara regular, Jurusan Matematika menyelenggarakan seminar jurusan setiap dua minggu secara *online*. Pelaksanaannya digilir diantara para dosen dari empat buah Laboratorium yang ada di Jurusan Matematika, dimulai dari Laboratorium Statistika, Analisis dan Aljabar, Matematika Terapan dan Komputasi. Hingga disusunnya buku ini, kegiatan seminar dua mingguan tersebut telah terlaksana delapan kali. Sebagai implemnetasi lanjut dari kegiatan tersebut, beberapa pembicara seminar menyumbangkan artikelnya untuk dimuat dalam buku dies natalis ini. Selain memuat artikel-artikel yang isinya telah dipaparkan melalui seminar di Jurusan Matematika, buku ini juga mendapat sumbangan dua artikel dari dosen-dosen di Jurusan Fisika, FMIPA Unsoed dan para koleganya.

Buku ini merupakan suatu karya ilmiah akademik yang pengerjaannya tentu saja telah memberikan pengalaman luar biasa, khususnya bagi para penulisnya. Pengalaman ini tentu akan menjadi bekal dan pendorong untuk mewujudkan karya-karya akademik lainnya di tahun-tahun mendatang.

Perlu kami sampaikan bahwasannya artikel yang ada dalam buku ini tidak disyaratkan harus orisinal dan baru. Kami menyadari bahwa artikel yang benar-benar mengandung orisinalitas ide, gagasan dan temuan akan dipublikasikan oleh penulisnya pada jurnal bergengsi terindeks Scopus. Namun demikian, buku ini tetap tidak kehilangan sisi ilmiahnya sebab buku ini telah melalui penelaahan isi dan bahasa oleh dua orang *reviewer*, dan sebagai suatu buku maka buku ini dapat dikategorikan sebagai buku ilmiah populer.

Meskipun berupa buku populer, namun metodologi penelitian tetap mengacu pada metode ilmiah, dan penulisannya dikemas sebagaimana menyusun artikel ilmiah. Beberapa jenis artikel yang dapat dimuat dalam buku ini antara lain artikel hasil penelitian yang mengawetkan orisinalitas; artikel hasil pengabdian dengan mengusung keaslian dan kebaruan ide dan gagasan; artikel yang merupakan kombinasi dari artikel-artikel yang telah dipublikasikan pada jurnal ilmiah bereputasi internasional atau nasional; artikel sebagai kombinasi dari hasil-hasil tugas akhir mahasiswa yang satu tema (kajian); artikel sebagai kombinasi dari hasil-hasil laporan kerja praktik mahasiswa yang satu tema (kajian); dan jenis lainnya.

Ucapan terima kasih kami haturkan kepada Rektor Universitas Jenderal Soedirman Bapak Prof. Dr. Suwarto, M.S., Dekan FMIPA Unsoed Bapak Drs. Sunardi, M.Si., Wakil Dekan Bidang Kemahasiswaan dan Alumni FMIPA Unsoed Bapak Roy Andreas, Ph.D. dan Ketua Jurusan Matematika Ibu Dr. Idha Sihwaningrum, M.Sc.Stat. yang telah mendorong, memberi dukungan dan merestui penyusunan buku ini sehingga dapat diterbitkan sebagai penanda peringatan Dies Natalis ke-6 FMIPA Unsoed. Ucapan terima kasih disampaikan pula kepada Penerbit Unsoed Press yang telah menerbitkan buku ini dengan kemewahan nan elegan. Ucapan terima kasih juga kami sampaikan kepada para penulis atas kontribusinya dalam menghasilkan rangkaian tulisan sehingga mewujudkan dalam satu buku.

Kami menyadari bahwa buku ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, masukan dari para pembaca sangat kami harapkan untuk perbaikan buku ini dan penyusunan buku sejenis pada tahun-tahun mendatang.

Purwokerto, 24 Oktober 2020
Dekan FMIPA Unsoed

Drs. Sunardi, M. Si.
NIP. 19590715 199002 1 001

DAFTAR ISI

	Halaman
Pengantar Dekan FMIPA	iii
Daftar Isi	v
Daftar Tabel	vi
Daftar Gambar	vii
Review Solusi Persamaan Black-Scholes Fraksional	
<i>Agus Sugandha</i>	1
Penentuan Hari Peringatan Haul Kematian dengan Modulo Matematika dan Modulo Matematika Jawa	
<i>Agung Prabowo</i>	10
Pemetaan Resiko Bencana Gempabumi Tektonik di Kawasan Eks-Karesidenan Banyumas Berdasarkan Data Kegempaan Masa Lalu	
<i>Sehah</i>	22
Kenormalan Asimtotik Statistik Getis Lokal Termodifikasi	
<i>Jajang</i>	33
Aljabar Geometri Selayang Pandang	
<i>Idha Sihwaningrum dan Sandi Setiawan</i>	43
Konstanta Dielektrik dan Rugi Dielektrik Serbuk Kitosan dengan Variasi Waktu Milling	
<i>Kartika Sari, Sunardi, Wihantoro, Aris Haryadi, Agung Bambang Setio Utomo, Parmin Lumban Toruan, Evi Yulianti dan Mashadi</i>	51
Biografi Singkat Penulis	57

DAFTAR TABEL

	Halaman
Penentuan Hari Peringatan Haul Kematian dengan Modulo Matematika dan Modulo Matematika Jawa	
Tabel 1 Rumus untuk Menentukan Waktu Pelaksanaan Peringatan Kematian dan Maknanya ..	14
Tabel 2 Umur Bulan (dalam hari) pada Tahun Masehi	15
Tabel 3 Hasil Penentuan Hari-Hari Peringatan Kematian	16
Tabel 4 Hasil Penentuan Hari-Hari Peringatan Kematian	18
Tabel 5 Nilai m dan p untuk Setiap Hari Peringatan	18
Tabel 6 Nilai m dan p dan Maknanya untuk Setiap Hari Peringatan	19
 Pemetaan Resiko Bencana Gempabumi Tektonik di Kawasan Eks-Karesidenan Banyumas Berdasarkan Data Kegempaan Masa Lalu	
Tabel 1 Daftar Bahan dan Peralatan yang Digunakan Dalam Penelitian	25

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Pemetaan Resiko Bencana Gempabumi Tektonik di Kawasan Eks-Karesidenan Banyumas Berdasarkan Data Kegempaan Masa Lalu	
Gambar 1 Peta sebaran pusat gempabumi tektonik berdasarkan kekuatan (<i>magnitude</i>) periode tahun 1903 – 2006 di Pulau Jawa dan sekitarnya	26
Gambar 2 Peta Sebaran Pusat Gempabumi Tektonik Berdasarkan Kedalaman Periode Tahun 1903 – 2006 di Pulau Jawa dan Sekitarnya	27
Gambar 3 Peta Percepatan Tanah Maksimum (<i>Peak Ground Acceleration</i> , PGA) Pulau Jawa dan Sekitarnya	28
Gambar 4 Peta Tingkat Resiko Gempabumi Tektonik Pulau Jawa Berdasarkan Data Seismisitas Gempabumi Tektonik Tahun 1903 – 2006.....	29
Gambar 5 Peta Tingkat Resiko Gempabumi Tektonik Eks-Karesidenan Banyumas (dan Kabupaten Kebumen) Berdasarkan Data Seismisitas Gempabumi Tektonik Masa Lalu (Tahun 1903 – 2006)	30
Kenormalan Asimtotik Statistik Getis Lokal Termodifikasi	
Gambar 1 Kurva G_i^* untuk $N=200$ pada Variasi p_i Menggunakan 5000 Permutasi Acak	37
Aljabar Geometri Selayang Pandang	
Gambar 1 (a) Perkalian Skalar pada Vektor; (b) Penjumlahan Vektor	44
Gambar 2 Representasi Geometris dari $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	45
Gambar 3 Representasi Geometris dari $ \mathbf{a} \times \mathbf{b} $	45
Gambar 4 Representasi Geometris dari Bivektor $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ dan $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$	46
Gambar 5 Representasi Geometris dari Trivektor $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$	47
Konstanta Dielektrik dan Rugi Dielektrik Serbuk Kitosan dengan Variasi Waktu Milling	
Gambar 1. Citra SEM Serbuk Kitosan (a) tanpa Dimilling, (b) Waktu Milling 120 Menit, dan (c) Waktu Milling 240 Menit	53
Gambar 2. Grafik Konstanta Dielektrik Serbuk Kitosan tanpa Dimilling (CH0), Waktu Milling 120 Menit (CH120) dan 240 Menit (CH240)	54
Gambar 3. Grafik Rugi Dielektrik Serbuk Kitosan tanpa Dimilling (CH0), Waktu Milling 120 Menit (CH120) dan 240 Menit (CH240)	55

REVIEW SOLUSI PERSAMAAN BLACK-SCHOLES FRAKSIONAL

Agus Sugandha

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman

Email: agussugandha74@gmail.com

Abstrak. Dalam tulisan ini akan dibahas solusi dari persamaan Black-Scholes fraksional yang merupakan bentuk umum dari persamaan Black-Scholes. Adapun metode-metode untuk mencari solusi dari persamaan Black Scholes Fraksional sudah banyak ditulis dalam banyak jurnal internasional. Solusi persamaan Black Scholes fraksional dalam hal ini ditinjau dengan pendekatan Kalkulus Fraksional. Dengan pendekatan Kalkulus Fraksional proses penyelesaian dalam mencari solusi persamaan Black Scholes Fraksional menjadi lebih efisien. Beberapa Metode yang digunakan untuk mencari solusi Persamaan Black Scholes Fraksional diantaranya adalah metode transformasi Sumudu, metode ekspansi deret, metode perturbasi Homotopi, metode dekomposisi Adomian, dan metode dekomposisi Laplace Adomian.

Kata kunci: dekomposisi Adomian, dekomposisi Laplace-Adomian, ekspansi deret, Kalkulus Fraksional, persamaan Black-Scholes Fraksional, perturbasi homotopi, solusi, transformasi Sumudu.

1. Pendahuluan

Dalam perkembangan ilmu Matematika khususnya persamaan diferensial parsial, sekarang ini ditemukan banyak sekali aplikasinya dalam bidang-bidang ilmu lain. Misalnya pada masalah penyebaran penyakit, mekanika fluida, dan masalah gelombang. Tentu saja ilmu dasar yang digunakan dalam persamaan diferensial parsial adalah kalkulus.

Sementara itu, kalkulus fraksional lahir pada tahun 1695. Kalkulus fraksional dimulai ketika l'Hopital, salah satu *founders* kalkulus, menulis surat kepada Leibnitz yang merupakan Bapak Kalkulus, arti dari $\frac{d^n y}{dx^n}$ untuk $n = \frac{1}{2}$. Kemudian Leibnitz menjawab bahwa hal tersebut merupakan sebuah paradoks yang suatu saat nanti akan sangat berguna. Kemudian, selama tiga dekade terakhir materi tentang kalkulus fraksional menemukan aplikasi dalam banyak masalah di berbagai disiplin ilmu seperti aliran fluida, difusi, anomaly difusi, reaksi difusi turbulensi, jaringan listrik, fisika, kimia, gelombang, teori distribusi statistik dan matematika keuangan.

Dalam matematika keuangan salah satu aplikasinya yaitu masalah investasi. Tujuan dari investasi ini adalah untuk memperoleh keuntungan dalam pasar keuangan. Dalam hal ini, investor mempunyai dua pilihan, yaitu pilihan untuk membeli aset yang diperdagangkan di dalam pasar keuangan atau menjual aset dengan tujuan untuk memperoleh keuntungan. Dalam ilmu ekonomi, hal ini disebut dengan masalah opsi.

Opsi adalah suatu jenis kontrak antara dua belah pihak, dimana satu pihak memberikan hak kepada pihak lain untuk menjual atau membeli aset tertentu pada harga dan periode tertentu. Berdasarkan jenis hak yang diberikan, opsi dapat dibedakan menjadi dua yaitu opsi *call* dan opsi *put*. Opsi *call* adalah suatu tipe kontrak yang memberikan hak kepada pemegang opsi untuk membeli dari penjual opsi sejumlah saham tertentu pada harga dan jangka waktu tertentu. Opsi *put* merupakan opsi yang memberikan hak kepada pemegangnya untuk menjual saham dalam jumlah tertentu kepada pembeli opsi pada waktu atau harga yang telah ditentukan. Sedangkan berdasarkan periode waktu penggunaan, opsi dapat dibedakan menjadi dua yaitu opsi tipe Eropa dan opsi tipe

Amerika. Tipe Eropa menunjukkan bahwa opsi tersebut dapat dilaksanakan pada saat jatuh tempo saja. Sedangkan tipe Amerika menunjukkan bahwa opsi tersebut dapat dilaksanakan pada saat jatuh tempo atau sebelumnya.

Fisher Black dan Miron Scholes pada tahun 1973 merumuskan suatu metode untuk menetapkan harga opsi. Metode tersebut sekarang dikenal dengan metode Black-Scholes. Dalam perkembangannya, metode Black-Scholes yang digunakan untuk menentukan harga opsi tidak hanya menjadi permasalahan dalam bidang matematika keuangan dan ekonomi saja, tetapi sudah berkembang juga untuk bidang matematika. Hal ini sangat wajar, karena persamaan Black-Scholes menggunakan Persamaan Diferensial Parsial. Dalam hal ini untuk mencari solusi dari persamaan Diferensial Parsial bukanlah suatu pekerjaan yang mudah di dalam bidang Matematika. Untuk mencari solusi dari persamaan Black-Scholes dapat menggunakan teori integral Ito, transformasi Fourier atau secara numerik dengan menggunakan metode Beda Hingga. Dari solusi yang diperoleh tersebut, kemudian dapat ditentukan formula opsi *put* dan opsi *call*-nya.

Dari persamaan Black-Scholes tersebut dikembangkan oleh ahli matematika menjadi persamaan Black-Scholes Fraksional. Sehingga dalam hal ini persamaan Black-Scholes merupakan kasus khusus dari persamaan Black-Scholes Fraksional. Adapaun beberapa metode untuk mencari solusi persamaan Black Scholes Fraksional adalah transformasi Sumudu, Metode Perturbasi Homotopi, Metode dekomposisi Adomian, Metode dekomposisi Adomian Laplace, dan Metode transformasi Diferensial. Taib, Kichman & Elbelese (2013) menggunakan kombinasi metode perturbasi *homotopy*, metode transformasi Sumudu dan polinomial He's untuk menentukan solusi persamaan Black-Scholes Fraksional. Kemudian Ghaedahari (2015) menggunakan metode dekomposisi deret beserta analisisnya untuk mencari solusi dari persamaan Black-Scholes Fractional. Sedangkan Khan (2016) menentukan solusi dari persamaan Black-Scholes Fraksional dengan menggunakan transformasi Sumudu dan sifat-sifat turunan dan integral Fraksional. Selanjtnya, pada tahun 2018, Yavus dan Necati menyelesaikan persamaan Black-Scholes Fraksional dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian. Tahun berikutnya, Kaya & Yilmas menyelesaikan berhasil Persamaan Diferensial Parsial dengan menggunakan sifat sifat transformasi Sumudu. Masih pada tahun yang sama yaitu 2019, Uddin and Taufiq mengunakan metode transformasi Laplace dikombinasikan dengan metode kernel radial untuk menentukan solusi dari persamaan Black-Scholes Fraksional. Dari beberapa penelitian tersebut, solusi analitik dari persamaan Black-Scholes Fraksional merupakan dalam bentuk deret tak hingga fungsi Mittag Lefler.

Sementara itu untuk masalah eksistensi dan ketunggalan solusi dari persamaan Black-Scholes Fraksional ditulis oleh Batogna pada tahun 2018. Beberapa alat (*tools*) yang digunakan untuk membahas masalah eksistensi dan ketunggalan tersebut diantaranya dengan teorema Picard Lindelof, teorema titik tetap Banach, dan teorema Arzella Ascoli. Selain itu juga dibahas mengenai solusi numerik dari persamaan Black-Scholes Fraksional secara numerik dengan menggunakan metode Crank-Nickholson.

2. Metodologi Penelitian

Metodologi penelitian pada tulisan ini adalah *literature review*. Pustaka dihimpun dari artike-artikel pada berbagai jurnal yang membahas solusi persamaan Black-Scholes Fraksional. Selanjutnya, dilakukan penulisan kembali langkah-langkah untuk mendapatkan solusinya.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Persamaan Black Scholes Fraksional

Model Persamaan Black-Scholes dengan nilai opsi di dinyatakan sebagai

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{\sigma x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + r(\tau)x \frac{\partial \psi}{\partial x} - r(\tau)\psi = 0 \quad (x, \tau) \in R^+ \times (0, T)$$

dengan $\psi(x, \tau)$ nilai opsi Eropa pada saat harga aset x pada waktu τ sedangkan T adalah *maturity*, $r(\tau)$ bunga bebas resiko dan $\sigma(x, r)$ menunjukkan fungsi volalitas dari *underlying asset* (aset dasar). Fungsi Payoff dinyatakan sebagai

$$\psi_c(x, \tau) = \max(x - E, 0), \quad \psi_p(x, \tau) = \max(E - x, 0),$$

dengan ψ_c dan ψ_p harga dari *European Call* dan opsi put, sedangkan E adalah *exercise price* untuk opsi. Sedangkan persamaan Black-Scholes Fraksional adalah persamaan

$$\frac{\partial^q \psi}{\partial \tau^q} + \frac{\sigma x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + r(\tau)x \frac{\partial \psi}{\partial x} - r(\tau)\psi = 0 \quad \text{dengan } (x, \tau) \in R^+ \times (0, T), 0 < q \leq 1$$

Berikut ini adalah beberapa metode untuk menyelesaikan persamaan Black-Scholes Fraksional:

3.2 Metode Transformasi Sumudu.

Dalam *paper* dari Waseem Asghar Khan dan Faryal Aijas Ansari dengan judul *European Option Pricing of Fractional Black-Scholes Model using Sumudu Transform and Its Derivatives*, pencarian solusi dari persamaan persamaan Black-Scholes Fraksional dilakukan dengan menggunakan metode transformasi Sumudu fraksional. *Transformasi Sumudu* adalah himpunan fungsi

$$A = \{\psi(\tau)\} / \exists M, t_1, t_2 > 0, |\psi(\tau)| < M e^{\tau/t_j}, \text{ jika } \tau \in (-1)^j \times [0, \sim]$$

dengan menggunakan rumus

$$F(u) = S[\psi(\tau)] = \int_0^\sim \frac{1}{u} e^{-\tau/u} \psi(\tau) d\tau$$

Alat untuk mencari solusi persamaan Black-Scholes Fraksional menggunakan definisi dan teorema berikut. Operator integral fraksional Riemann-Liouville dari *order* q dari fungsi $\mu(x) \in K_\omega$ dengan $\omega \geq -1$ diberikan sebagai berikut:

$$J^q \psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x (x - \tau)^{q-1} \psi(\tau) d\tau, & q > 0, x > 0 \\ \psi(x), & q = 0 \end{cases}$$

Operator J^q memiliki sifat sifat berikut:

- $J^0 \psi(x) = \psi(x)$
- $J^q J^\tau \psi(x) = J^{q+\tau} \psi(x)$
- $J^q J^\tau \psi(x) = J^\tau J^q \psi(x)$
- $J^q x^\zeta = \frac{\Gamma(\zeta+1)}{\Gamma(q+\zeta+1)} x^{q+\zeta}$
- $J^q C = \frac{C}{\Gamma(q+1)} x^q$

Definisi 1:

Turunan Fraksional Caputo D^q fungsi $\psi(x)$ dari bilangan real q seemikian sehingga

$m - 1 < q \leq m, m \in N$, untuk $x > 0$ dan $\psi \in C_{-1}^m$ sebagai

$$D^q \psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-q)} \int_0^x (x-\tau)^{m-q-1} \psi^{(m)}(\tau) d\tau \\ \frac{\partial^m \psi(x)}{\partial x^m} \end{cases} \quad q = m$$

Definisi 2:

Transformasi Sumudu $S[\psi(\tau)]$ dari integral fraksional Riemann-Liouville diberikan oleh:

$$S[J^q \psi(\tau)] = u^q S[\psi(\tau)]$$

Definisi 3:

Transformasi sumudu $S[\psi(\tau)]$ dari turunan fraksional Caputo diberikan oleh

$$S[D^q \psi(\tau)] = u^{-q} S[\psi(\tau)] - \sum_{k=0}^{m-1} u^{-q+k} \psi^{(k)}(0), \quad m - 1 < q \leq m$$

dan invers transformasi sumudu diberikan oleh :

$$S^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m-1} u^k \psi^{(k)}(0)\right) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\tau^k \psi^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)}$$

Metode untuk mencari solusi persamaan Black-Scholes fraksional dengan menggunakan metode transformasi sumudu fraksional. Hasilnya penyelesaian/solusi dari persamaan Black-Scholes Fraksional dalam bentuk

$$\psi(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\psi}_n(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}_n(x) \frac{\tau^{nq}}{\Gamma(qn+1)}$$

3.3 Metode Ekspansi Deret.

Andaikan persamaan diferensial fraksional

$$D_t^q \psi(x, \tau) + L[\psi(x, \tau)] + N[\psi(x, \tau)] = Q(x, \tau); \quad \tau > 0, m - 1 < q \leq m$$

dengan kondisi awal $\psi(x, 0) = f_0(x)$ dan L adalah operator diferensial linier, N adalah operator diferensial non linier

$$S[D_t^q \psi(x, \tau)] + S[L[\psi(x, \tau)] + N[\psi(x, \tau)]] = S[Q(x, \tau)].$$

Dengan menggunakan sifat transformasi Sumudu, diperoleh:

$$S[\psi(x, \tau)] = \psi(x, 0) + u^q S[Q(x, \tau) - L[\psi(x, \tau)] - N[\psi(x, \tau)]]$$

Selanjutnya, dengan menggunakan invers Sumudu, diperoleh solusi dari persamaan Black Scholes Fraksional:

$$\psi(x, \tau) = \psi(x, 0) + S^{-1} [u^q S[Q(x, \tau) - L[\psi(x, \tau)] - N[\psi(x, \tau)]]]$$

$$\psi(x, \tau) = \psi(x, 0) + J_\tau^q [Q(x, \tau) - L[\psi(x, \tau)] - N[\psi(x, \tau)]]$$

dengan

$$\psi_0(x, \tau) = \psi(x, 0) = f_0(x)$$

$$\psi_{n+1}(x, \tau) = J_\tau^q [Q(x, \tau) - L[\psi_n(x, \tau)] - N[\psi_n(x, \tau)]]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n(x) \frac{\tau^{nq}}{\Gamma(qn+1)}$$

$$\psi(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}_n(x) \frac{\tau^{nq}}{\Gamma(qn+1)}$$

3.3 Metode Perturbasi Homotopi.

Dalam *paper* tulisan Asma Ali Elbeleze, Kihcman dan Bachok Taib dengan judul *Homotopy Perturbation Method for Fractional Black-Scholes European Option Pricing Equations using Sumudu Transform*, solusi persamaan Black-Scholes Fraksional dicari dengan menggunakan metode perturbasi homotopi. Alat atau perangkat yang untuk mencari solusi yaitu transformasi Sumudu, operator integral fraksional Riemann-Liouville, turunan fraksional Caputo, dan fungsi Mittag-Leffler. Gambaran metode perturbasi adalah sebagai berikut. Berikut ini adalah persamaan diferensial non linear

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega \quad (1)$$

dengan kondisi batas

$$B(u, \frac{\partial u}{\partial n}) = 0 \quad r \in \Gamma \quad (2)$$

dengan A operator turunan umum, B operator batas, $f(r)$ fungsi analitik dan Γ adalah batas dari domain Ω . Persamaan difrensial non linear (1) dapat dinyatakan:

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \quad (3)$$

Kemudian dibentuk homotopi $v(r, p): \Omega \times [0, 1] \rightarrow R$ yang memenuhi

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0 \text{ dengan } p \in [0, 1] \quad (4)$$

atau:

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + p[L(u_0) + p[N(v) - f(r)]] = 0 \quad (5)$$

dengan $p \in [0, 1]$ parameter *embedding* dan u_0 adalah aproksimasi awal dari persamaan (1) yang memenuhi kondisi batas. Dari (4) dan (5) diperoleh:

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0$$

$$H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0$$

$$L(v) - L(u_0) \text{ dan } A(v) - f(r) \text{ disebut dengan homotopi.}$$

Asumsikan solusi dari (4) dan (5) dapat diekpresikan sebagai

$$v = v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + \dots$$

Untuk $p = 1$

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + \dots$$

Metode untuk mencari solusi persamaan Black-Scholes Fraksional adalah metode perturbasi dan transformasi Sumudu. Hasil adalah solusi persamaan Black-Scholes yang dinyatakan sebagai

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, t) = Q(x, t) - p(S^{-1}[u^\alpha S[L \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, t) + \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u)]).$$

dengan H_n polinomial Hesse

$$H(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} [N(\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_i)], \quad N \text{ adalah operator turunan non linier.}$$

3.4 Metode dekomposisi Adomian.

Dalam tulisan Ghandehari dan Ranjbar dengan judul *European Option Pricing Model Black-Scholes Fraksional: Approach via Expansion in Series* (2014), tujuannya adalah mencari solusi persamaan Black-Scholes Fraksional dengan metode dekomposisi Adomian. Alat-alat yang digunakan yaitu operator integral fraksional Riemann-Liouville, turunan fraksional Caputo, dan fungsi Mittag Leffler. Berikut ini adalah ilustrasi dari metode dekomposisi Adomian:

Andaikan persamaan diferensial fraksional non linear dinyatakan sebagai

$$D_t^\alpha V(x, t) + R[x]V(x, t) + N[x]V(x, t) = 0 \quad t > 0, x \in R, 0 < \alpha \leq 1 \quad (6)$$

$$V(x, 0) = g(x)$$

dengan $R[x]$ adalah operator linear, $N[x]$ operator linear umum.

Bentuk (6) dapat ditulis sebagai

$$D_t^\alpha V(x, t) = -\mathcal{L}[x] * V(x, t) \quad (7)$$

dengan $\mathcal{L}[x] = R[x] + N[x]$

Dengan menggunakan hubungan operator Riemann-Liouville dan operator diferensial fraksional Caputo dan dengan menggunakan operator $D_t^{-\alpha}$ akan diperoleh

$$V(x, t) = V_0(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{V}_k(x, t) \quad (8)$$

dengan $V_0(x, t) = g(x)$. Substitusi (8) ke (7) diperoleh

$$V_{n+1}(x, t) = D_t^{-\alpha}(-\mathcal{L}[x] * V_n(x, t)) \quad (9)$$

3.5 Konvergensi Metode Dekomposisi Adomian.

Berikut ini adalah masalah konvergensi deret dekomposisi. Perhatikan persamaan Black-Scholes fraksional

$$V_t^\alpha + ax^2 V_{xx} + bx V_x - rV = 0 \quad 0 < \alpha \leq 1$$

dengan $a = \frac{\sigma^2}{2}$, $b = r$ dan kondisi awal $V(x, 0) = g(x)$.

Dengan menggunakan persamaan (6), (7) dan (8)

$$V_0(x, t) = g(x)$$

$$V_{n+1}(x, t) = ((-\mathcal{L}[x])^n * g(x)) D_t^{-\alpha} \left(\frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} \right)$$

sehingga

$$V(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)} (-1)^k (\mathcal{L}^k[x] * g(x))$$

dengan $\mathcal{L}[x] = ax^2 D_{xx} + bx D_x - r$

$$V(x, t) = E_\alpha(-t^\alpha \mathcal{L}[x] * g(x))$$

3.6 Metode dekomposisi Laplace Adomian.

Secara umum persamaan diferensial parsial non linear berorde dua dengan kondisi awal dapat di tuliskan dalam bentuk:

$$Lu(x, t) + Ru(x, t) + Nu(x, t) = h(x, t),$$

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$u_t(x, 0) = g(x)$$

dengan

L : operator diferensial order dua

R : operator linear

N : operator diferensial non linear

Kemudian gunakan transformasi Laplace kedua sisi

$$\mathcal{L}[Lu(x, t)] + \mathcal{L}[Ru(x, t)] + \mathcal{L}[Nu(x, t)] = \mathcal{L}[h(x, t)]$$

$$s^2 \mathcal{L}[u(x, t)] - sf(x) - g(x) + \mathcal{L}[Ru(x, t)] + \mathcal{L}[Nu(x, t)] = \mathcal{L}[h(x, t)]$$

sehingga:

$$\mathcal{L}[u(x, t)] = \frac{f(x)}{s} + \frac{g(x)}{s^2} - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[Ru(x, t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[Nu(x, t)] + \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[h(x, t)]$$

Langkah berikutnya adalah metode dekomposisi Laplace merepresentasikan solusi sebagai deret tak hingga

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

Operator non linear dinyatakan sebagai:

$$Nu(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x, t)$$

dengan

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [N(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i)]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}[u_0(x, t)] = \frac{f(x)}{s} + \frac{g(x)}{s^2} - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[Ru(x, t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x, t)] + \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[h(x, t)]$$

$$\mathcal{L}[u_0(x, t)] = k_1(x, s)$$

$$\mathcal{L}[u_1(x, t)] = k_2(x, s) - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[R_0 u(x, t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[A_0(x, t)]$$

$$\mathcal{L}[u_{n+1}(x, t)] = -\frac{1}{s^2} \mathcal{L}[R_n u(x, t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[A_n(x, t)]$$

Kemudian diambil invers Laplace-nya diperoleh:

$$u_0(x, t) = k_1(x, t)$$

$$u_1(x, t) = k_2(x, s) - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} [R_0 u(x, t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[A_0(x, t)] \right]$$

$$u_{n+1}(x, t) = -\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} [R_n u(x, t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[A_n(x, t)] \right]$$

$$u(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k u_n(x, t)$$

3.7 Konvergensi Analisis Metode Adomian-Laplace

Diberikan ruang Hilbert H yang didefinisikan sebagai berikut:

$$H = L^2(\alpha, \beta) \times [0, T] \text{ dan } u: (\alpha, \beta) \times [0, T] \rightarrow R$$

dengan

$$\int_{(\alpha, \beta) \times [0, T]} u^2(x, s) ds d\tau < \infty$$

Metode Adomian-Laplace yang dimodifikasi konvergen bila memenuhi dua sifat berikut:

$$(H1) \quad \langle L(u) - L(v), u - v \rangle \geq k \|u - v\|^2; k > 0, \text{ untuk setiap } u, v \in H$$

$$(H2) \quad \text{Untuk setiap } M > 0 \text{ terdapat konstan } C(M) > 0 \text{ sedemikian untuk setiap } u, v \in H \\ \text{dengan } \|u\| \leq M, \|v\| \leq M \text{ diperoleh } \langle L(u) - L(v), u - v \rangle \leq C(M) \|u - v\| \|w\| \\ \text{untuk setiap } w \in H$$

4. Kesimpulan dan Saran

Adapun solusi dari persamaan Black-Scholes Fraksional adalah $(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\psi}_n(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}_n(x) \frac{\tau^{nq}}{\Gamma(qn+1)}$ yang merupakan deret tak hingga fungsi Mittag-Leffler. Masih banyak yang bisa dikerjakan untuk materi penelitian lebih lanjut misalkan mengenai masalah eksistensi dan ketunggalan solusi dari persamaan Black-Scholes Fraksional, mencari opsi *call* dan *put* dan arti dari orde persamaan Black-Scholes dalam masalah ekonomi dan matematika keuangan. Bisa juga diteliti untuk persamaan Black-Scholes Fraksional yang dimodifikasi. Sehingga masih terbuka lebar masalah-masalah yang bisa diteliti untuk perkembangan persamaan Black-Scholes Fraksional.

Daftar Pustaka

- Ahmed and Abdusalam. (2004). On Modified Black-Scholes Equation. *Chaos, Solutions and Fractals*, **22**(2004): 583-587.
- Aguilar, J.P & Korbel, J.(2018) *Option Pricing Model Driven by the Space Time Fractional Diffusion: Series Representation and Application*. Teredia: www.mpdj.com/journal/fractalfract [Diakses: 17 September 2002].
- Elbeleze, A.A., and Adem kihcman, and Bachok M.Taib (2013). Homotopy Perturbation Method for Fractional Black-Scholes European Option Pricing Equations Using Sumudu Transform. *Mathematical Problems in Engineering*. **2013**(524852).
- Kanth, A.S.V.R., and Aruna, K. (2016). Solution of Time Fractional Black-Scholes European Option Pricing Equation Arising in Financial Market. *Non Linear Engineering*. **5**(4): 269-176.
- Naghipour, A. and Manafian, J. (2015). Application Of The Laplace Adomian Decomposition And Implicit Methods for Solving Burger's equation. *Journal Pure Appl Math*. **6**(1): 68-77.
- Batogna, R.G. (2018). *Analysis of Option Pricing within the Scope of Fractional Calculus*. Departement of Mathematics and Applied Mathematics Faculty of Natural and Agricultural Science at the University of the Free State.
- Belgacem and Karaballi. (2005). Sumudu Transform Fundamental Properties Investigation and Applications. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*. **2006**(91083): 1-23.
- Eltayeb, H. and Kihcman, A. (2010). A Note on the Sumudu Transform and Differential Equations, *Applied Mathematical Sciences*. **4**(22): 1089-1098.
- Eshag Omer M, (2017). Double Laplace Transform and Double Sumudu Transform. *American Journal of Engineering Research*. **6**(5): 312-317.
- Ghaedahari and Ranjbar. (2014). European Option Pricing of Fractional Version of the Black-Scholes Model Approach via Expansion in Series. *International Journal of Non Linear Science* vol **17**(2): 105-110.
- Kaya, F. and Yilmaz, Y. (2019). Basic Properties of Sumudu Transformation and Its Application to Some Partial Differential Equations. *Sakarya University Journal of Science*. **23**(4), 509-514.
- Khan, A.W (2016). European Pricing of Fractional Black-Scholes Model Using Sumudu Transform and its Derivatives (General Letters In Mathematics). *General Letters in Mathematics*. **1**(3): 74-80.
- Uddin, M. and Taufiq, M. (2019). Approximation of Time Fractional Black-Scholes Equation via Radial, Kernels and Transformation. *Fractional Differential Calculus*. **9**(1): 75-90.
- Mishra, R., Aggarwal, Chaundari, L., and Kumar, A. (2020). Relationship between Sumudu and Some Efficient Integral Transform. *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering*.
- Yavuz, M. and Ozdemir, N. (2018). A Quantitative Approach to Fractional Option Pricing Problems with Decomposition Series. *Konuralp Journal of Mathematics*. **6**(1): 102-109.
- Mohebbi, M.A. and Ranjbar, M. (2014). European Option Pricing of Fractional Black-Scholes Model with New Lagrange Multipliers. *Computational Methods for Differential Equations*.
- Ozkan, O. and Kurt, A. (2019). A New Method for Solving Fractional Partial Differential Equation. *The Journal of Analysis*.

- Ranjbar and Ghandehari. (2015). Barrier Options pricing of fractional version of vthe Black-Scholes Model. *International Journal Industrial Mathematics*. 7(2):
- Safira. (2019). Methods to Solve Fractional Black-Scholes. *Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Opertions Management*. Pilsen, Czech Republic, July 23-26, 2019.
- Sumiati, I., Rusyaman, E., and Sukono. (2019). Black-Scholes Equation Solution Using Laplace - Adomian Decomposition Method. *IAENG International Journal of Computer Science*. 46(4): 21.
- Taib, Kichman, A. and Elbelese. (2013). Homotopy Perturbation Method for Fractional Black-Scholes European Option Pricing Equations using Sumudu Transform. *Mathematical Problem in Engineering*. 2013(524852).
- Khan, K. and Wu, Q. (2011). Homotopy Perturbation Transform Method for Nonlinear Equation using He's Polynomials. Tersedia: www.elsevier.com/locate/camws. [Diakses 12 Agustus 2020].
- Khan, A.A., and Ansari, F.A. (2016). European Option Pricing of Fractional Black-Scholes Model using Sumudu Transform and Its Derivative. *General Letters in Mathematics*. 1(3): 74-80.

PENENTUAN HARI PERINGATAN HAUL KEMATIAN DENGAN MODULO MATEMATIKA DAN MODULO MATEMATIKA JAWA

Agung Prabowo

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman

Email: agung.prabowo@unsoed.ac.id ; agung_nghp@yahoo.com

Abstrak. Dalam beberapa hal, tradisi Jawa mengembangkan matematikanya sendiri sehingga kehidupan manusia Jawa kaya dengan pengetahuan Matematika Jawa. Namun, pengetahuan tersebut tidak dimunculkan secara terang-benderang, alias disembunyikan. Masyarakat cukup tahu hasil jadinya. Sisi *queen* (teoritis) dari Matematika Jawa disembunyikan, dan sisi *servant* (aplikasi/kegunaan) dari Matematika Jawa ditonjolkan. Demikianlah, Matematika Jawa mengawetkan eksistensinya. Salah satu aplikasi Matematika Jawa yang hingga saat ini masih terus digunakan adalah konsep modulo yang dipandang sebagai pengurangan berulang dalam berbagai primbon. Seperti halnya dengan matematika yang memiliki konsep modulo, tradisi Jawa juga menyimpan konsep modulonya sendiri. Dalam artikel ini kedua jenis modulo tersebut yang dikembangkan oleh budaya dan tradisi yang berbeda (Eropa dan Jawa) dicoba untuk disandingkan guna memecahkan suatu masalah yang berakar pada budaya Jawa. Hasil penelitian dengan menggunakan kedua jenis modulo tersebut memberikan hasil perhitungan yang berbeda, namun sesungguhnya sama. Selain itu, juga ditampilkan formula-formula tradisional Jawa yang selama ini dikembangkan dan digunakan sebagai alat atau piranti untuk memberikan solusi bagi problem tradisi seperti peringatan haul kematian. Formula-formula tradisional tersebut selanjutnya dieksplorasi sehingga adanya modulo dalam Matematika Eropa dan Matematika Jawa menjadi keniscayaan.

Kata kunci: haul kematian, matematika, matematika Jawa, modulo, haul kematian.

1. Pendahuluan

Setiap yang bernyawa pasti akan ajal. Dalam aktuaria kita menuliskannya dengan sebuah persamaan $\int_0^{\omega} p_x \cdot \mu_{x+t} dt = 1$ (Prabowo *et al.*, 2020a) Untuk setiap orang, nilai ω -nya berbeda-beda.

Selisih antara kedua batas integrasi menyatakan umur orang tersebut.

Dalam tradisi Jawa, seseorang yang telah meninggal akan diperingati atau dirayakan hari kematiannya. Peringatan tersebut dinamakan haul. Kata haul berasal dari bahasa Arab (ال^{ال}حول) yang berarti setahun (NN, 2020). Meskipun demikian, tradisi haul tidak harus diselenggarakan tepat satu tahun sebagaimana orang merayakan ulang tahun. Hari atau tanggal pelaksanaannya juga bergantung pada pertimbangan keluarga penyelenggara.

Tradisi haul biasanya hanya ditemui di kalangan masyarakat Muslim Sunni seperti di negeri Yaman, Indonesia, Malaysia dan Singapura serta negara-negara lain yang memiliki komunitas muslim Sunni (NN, 2020). Haul juga menjadi pembeda antara ulama dan Rasulullah. Jika Rasulullah Muhammad diperingati hari kelahirannya melalui maulid maka para ulama diperingati hari kewafatannya melalui tradisi haul. Hal ini dikarenakan kelahiran Rasulullah memiliki keistimewaan; telah dinanti dan dijanjikan dalam ajaran nabi-nabi sebelumnya dan diiringi dengan mukjizat-mukjizat. Sementara kelahiran ulama adalah layaknya kelahiran bayi-bayi pada umumnya, keistimewaan ulama baru tampak dan bergantung pada masa hidup hingga kewafatan ulama tersebut.

Haul merupakan tradisi peringatan kematian seseorang yang diadakan dengan tujuan mendoakan ahli kubur agar semua amal ibadah yang dilakukannya diterima Allah SWT sekaligus mengenang keteladanan semasa hidup dari orang (tokoh) yang diperingati tersebut (NN, 2020).

Peringatan haul kematian tersebut merupakan bagian dari tradisi Jawa. Istilah lain yang digunakan untuk menyebut haul adalah *selamatan*.

Sebagai bagian dari tradisi Jawa, peringatan kematian yang disebut juga *selamatan* pelaksanaannya didasarkan pada perhitungan Tahun Jawa (*Anno Javanica*), yang setahunnya berumur 354 atau 355 hari. Peringatan atau *selamatan* anggota keluarga yang meninggal mencakup (1) peringatan tepat hari meninggal (*geblake*), (2) peringatan 3 hari, (3) peringatan 7 hari, (4) peringatan 40 hari, (5) peringatan 100 hari, (6) peringatan *pendhak* 1 (354 hari), (7) peringatan *pendhak* 2 (708 hari), dan (8) peringatan 1000 hari (Prabowo *et al.*, 2020a).

Dalam artikel ini akan dibangun model matematika untuk menentukan saat dilaksanakannya masing-masing peringatan tersebut yang dihitung pada kalender Masehi. Model matematika diperoleh dengan menggunakan modulo dalam Matematika dan Modulo dalam Matematika Jawa. Model matematika yang dihasilkan dapat digunakan untuk menentukan hari pelaksanaan peringatan kematian. Model yang diperoleh juga menunjukkan bahwa tradisi-tradisi yang dilaksanakan masyarakat Jawa menemukan landasannya pada konsep-konsep matematika yang sekarang ini digunakan. Oleh karena itu, pada awal pembahasan dipaparkan mengenai sumbangan kearifan lokal Jawa dalam penentuan waktu pelaksanaan *selamatan*/peringatan kematian/haul.

Tujuan penelitian ini adalah (1) jika diketahui tanggal kematian pada kalender Masehi, kapankah kedelapan peringatan kematian akan dilakukan, (2) bagaimanakah perbedaan antara penggunaan modulo matematika dengan modulo matematika Jawa dalam penentuan hari peringatan, (3) apakah yang dapat diungkapkan dari kaitan antara peristiwa-peristiwa dalam tradisi Jawa dengan model matematika yang dapat dibentuk dari peristiwa tersebut? dan (4) apakah nama kemampuan spesial ini?

2. Metodologi Penelitian

Penelitian dilakukan dengan studi literatur dan studi lapangan. Kajian literatur dilakukan terkait dengan perlunya modulo dalam pemodelan yang dilakukan. Kajian literatur juga dilakukan terhadap kebiasaan atau kearifan lokal yang ditemukan dalam primbon. Penelitian lapangan berupa pengamatan terhadap tradisi Jawa berupa peringatan kematian yang dilakukan oleh masyarakat Jawa. Penelitian lapangan juga dilakukan untuk memastikan bahwa tradisi tersebut masih dijalankan serta pelaksanaannya menggunakan aturan-aturan tertentu yang bersifat tradisi.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Sistem Kalender Jawa

Kalender Jawa diciptakan oleh Sultan Agung Hanyokro Kusumo (raja ke-3 Kesultanan Mataram Islam). Kalender tersebut menggantikan kalender Saka yang telah digunakan sejak masa Mataram Kuno (Prabowo *et al.*, 2015). Tahun Jawa tidak dimulai dengan Tahun 1, tapi melanjutkan angka tahun pada Kalender Saka.

Kalender Jawa pertama kali digunakan pada 6 Juli 1633 Masehi, hari Jumat-Manis (*Sweet-Friday*), bertepatan dengan 1 Sura 1555 Jawa = 1 Muharam 1043 Hirjiah = 1 *Caitra* 1555 Saka. Artinya, penggunaan kalender Jawa ditandai dengan 3 tahun baru: Jawa, Saka dan Hijriah. Saat ini

ketika artikel ini disunting adalah tanggal 1 April 2020 M = 7 *Rajab* 1953 Jawa = 7 Syaban 1441 Hijriah = 8 *Caitra* 1942 Saka.

Satu tahun pada Kalender Jawa terdiri 12 bulan. Umur bulan ganjil adalah 30 hari, umur bulan genap adalah 29 hari. Umur satu tahun adalah $(6 \times 30) + (6 \times 29) = 354$ hari. Sedangkan umur tahun kabisat adalah 355 hari, tambahan 1 hari pada bulan ke-12. Setiap 8 tahun terdapat 3 kali tahun kabisat yaitu tahun ke-2, 3, 8. Siklus 8 tahun disebut satu windu. Umur 1 windu = $(5 \times 354) + (3 \times 355) = 2.835$ hari.

Angka-angka yang muncul pada Kalender Jawa seperti 354, 355, dan 2.835 menunjukkan perlunya pengetahuan matematika untuk menyusun Kalender Jawa. Maka, Kalender Jawa merupakan *mathematical calendar* (Prabowo, 2020). Pengetahuan yang digunakan untuk menyusun Kalender Jawa bukanlah matematika yang sekarang diajarkan di ruang kelas, tetapi pengetahuan matematika yang dikembangkan sendiri oleh manusia Jawa (Prabowo dan Pramono, 2104). Sultan Agung (lahir 1593 M), Isaac Newton (lahir 1642 M) dan Gottfried Wilhelm Leibniz (lahir 1646 M) memang hidup pada masa yang hampir bersamaan, tetapi dengan letak geografis yang berbeda. Pada saat Newton dan Leibniz mencipta kalkulus yang menjadi cikal-bakal matematika sekarang, Sultan Agung sudah belajar Matematika Jawa dan menggunakannya untuk menciptakan Kalender Jawa.

Sebagai sistem kalender komariah, pergantian hari pada Tahun Jawa dimulai pada saat bulan terbit di barat. Sedangkan pada sistem kalender syamsiah seperti yang digunakan pada Tahun Masehi, pergantian hari dimulai pada tengah malam. Dengan demikian, hari Senin tanggal 2 Maret 2020 pukul 16.01 pada Tahun Jawa sudah dihitung sebagai hari Selasa. Sedangkan pada Tahun Masehi masih dihitung hari Senin. Pergantian hari pada sore hari menjadi alasan bahwa peringatan-peringatan tradisi Jawa dilakukan pada malam hari sesaat setelah pergantian hari. Pergantian hari dalam sistem kalender komariah dimulai pada saat bulan terbit, saat *luna*, *lunar*, *arche*, *janus*, *qomar*, *amaris*, *badriyah*, *cynthia*, *diana*, *laissa*, *lucy*, *mona*, *quila*, *selene*, *indu*, *bindu*, *candra*, *candrama*, *candrawilasita*, *badru*, *soma*, *wulan*, *amulan*, *wulana*, *lek*, *kirana*, *sasadhara*, *sasadharana*, *sasalancana*, *sasi*, *sasikirana*, *sitakara*, *sitangsu*, *sitairesmi*, terbit di sebelah barat, sehingga beberapa orang berpendapat bahwa pergantian hari terjadi pada saat maghrib (pukul 18.00).

3.2 Pawukon

Siklus *selapanan* telah digunakan sejak Kerajaan Mataram Kuno, abad 8 M (Prabowo, 2016; Prabowo *et al.*, 2017d; Prabowo *et al.*, 2019a; Prabowo *et al.*, 2019c). Siklus tersebut dibentuk oleh perputaran dua buah siklus: *saptawara* (mingguan) dan *pancawara* (pasaran). Siklus *selapan* = $7 \times 5 = 35$ hari, artinya setiap 35 hari akan kembali pada hari yang sama.

Dalam Tahun Jawa terdapat dua buah jenis hari yaitu hari-mingguan (*saptawara*) dan hari-pasaran (*pancawara*). Hari-mingguan adalah siklus harian yang umurnya tujuh hari, dimulai dari Jumat, Sabtu, Minggu, Senin, Selasa, Rabu, Kamis dan kembali lagi ke Jumat. Hari-pasaran adalah siklus harian yang umurnya lima hari, dimulai *Legi*, *Pahing*, *Pon*, *Wage*, *Kliwon* dan kembali lagi ke *Legi* (Prabowo, 2016; Prabowo *et al.*, 2017a; Prabowo, *et al.*, 2017b). Dengan demikian, setiap tanggal pada Tahun Jawa dan juga Tahun Masehi yang digunakan oleh masyarakat Jawa selalu ditandai dengan kedua nama hari tersebut. Sebagai contoh, tanggal 3 Maret 2020 jatuh pada siklus mingguan Selasa dan siklus pasaran *Pon*, sehingga 3 Maret 2020 adalah Selasa *Pon*.

Dalam tradisi Jawa, hari lahir seseorang disebut *weton*. Ulang tahun dirayakan setiap 35 hari sekali atau setiap *selapan* hari sekali (Prabowo et al., 2019b), sehingga lebih tepat disebut ulang *weton* karena yang berulang kali dirayakan adalah hari lahirnya yang disebut *weton*.

Siklus 6 kali *selapan* = $6 \times 35 = 210$ hari disebut *pawukon* (Prabowo et al., 2017c). Melihat umurnya yang cukup lama, yaitu 210 hari maka *pawukon* menyerupai tahun. Namun, dalam *pawukon* tidak ditemukan adanya tanggal, bulan, dan angka tahun. Unsur yang ditemukan dalam *pawukon* adalah *wuku*. Setiap *wuku* berumur 7 hari dan terdapat 30 buah *wuku* dalam *pawukon* sehingga umur *pa-wuku-an* atau *pawukon* adalah $7 \times 30 = 210$ hari. Meskipun siklus *wuku* berlangsung 7 hari, namun *wuku* berbeda dengan siklus mingguan. *Pawukon* juga dapat dipandang sebagai siklus bersama 5-harian (*pancawara*, *pasaran*), 6-harian (*sadwara*), dan 7-harian (*saptawara*, mingguan), sehingga umur *pawukon* adalah $5 \times 6 \times 7 = 210$ hari.

Salah satu penggunaan *pawukon* dalam tradisi Jawa adalah untuk menentukan saat terjadinya ovulasi (pertemuan sel telur dengan sperma) yang kemudian lahir sebagai manusia. Asumsi yang digunakan adalah lama masa kehamilan tepat 280 hari (9 bulan 10 hari). *Pawukon* menunjukkan bahwa saat kelahiran adalah juga saat ovulasi.

Misalkan ovulasi terjadi pada hari ke-0 dan pasaran ke-0, maka 35 hari kemudian akan sampai pada waktu yang sama, yaitu $35 = 1 \times 35 + 0$. Masa kehamilan adalah 9 bulan 10 hari = 280 hari dan $280 = 8 \times 35 + 0$. Sisa 0 menunjukkan saat kelahiran = saat ovulasi

3.3 Kearifan Lokal Jawa dalam Penentuan Peringatan Kematian

Tradisi selamatn untuk orang yang sudah meninggal dilakukan sebanyak delapan kali terhitung sejak orang tersebut meninggal. Cara menentukan hari pelaksanaannya berpedoman pada rumus-rumus yang merupakan kearifan lokal tradisi Jawa.

Hari pelaksanaan ditentukan sebagai kombinasi dua jenis hari yaitu hari *saptawara* atau mingguan (siklus tujuh harian) dan hari *pancawara* atau *pasaran* (siklus lima harian). Sebagai contoh, rumus *jisarji* berarti hari *saptawara* ke-1 (*ji* = *siji* = 1) dan hari *pasaran* ke-1. Suku kata *sar* berarti *pasaran*. Penentuan tanggal pelaksanaan dalam kalender Masehi dilakukan dengan cara menentukan tanggal yang bersesuaian dengan hari *saptawara-pancawara* saat peringatan dan kesesuaian dengan hitungan hari keberapa yang akan diperingati. Berikut ini adalah rumus-rumus kearifan lokal yang digunakan dalam tradisi Jawa untuk sebanyak delapan kali peringatan.

1. ***Geblag*** atau selamatn setelah pemakaman. Ada juga yang menyebutnya ***Ngesur/Nyaur Tanah***. Cara menentukan hari pelaksanaannya berpedoman pada rumus *jisarji* dan harus dilaksanakan pada hari itu juga.
2. ***Nelung dina*** atau selamatn setelah tiga hari kematian. Cara menentukan waktu selamatn hari dan pasaran nelung dina digunakan rumus *lusarlu*, yaitu hari ketiga dan pasaran ketiga.
3. ***Mitung dina*** atau selamatn setelah tujuh hari kematian. Cara menentukan waktu selamatn hari dan pasaran mitung dina digunakan *tusaro*, yaitu hari ke ketujuh dan pasaran kedua.
4. ***Matangpuluh dina*** atau selamatn setelah 40 hari kematian. Cara menentukan waktu selamatn hari dan pasaran matangpuluh dina digunakan rumus *masarma*, yaitu hari kelima dan pasaran kelima.

5. **Nyatus dina** atau selamat setelah 100 hari kematian. Cara menentukan waktu selamat bari dan pasaran digunakan rumus perbitungan bari *rosarma*, yaitu hari kedua dan pasaran kelima.
6. **Mendhak sepisan** atau selamat setelah satu tahun kematian. Cara menentukan waktu selamat hari dan pasaran mendhak pisan digunakan rumus *patsarpat* yaitu hari keempat dan pasaran keempat.
7. **Mendhak pindho** atau selamat setelah dua tahun kematian. Cara menentukan waktu selamat hari dan pasaran mendhak pindho digunakan rumus *rosarpat*, yaitu hari kesatu dan pasaran ketiga.
8. **Nyewu** atau selamat setelah seribu hari kematian. Cara menentukan waktu selamat hari dan pasaran seribu hari (nyewu) digunakan rumus *nemsarma* yaitu hari keenam dan pasaran kelima.

Tabel 1 menampilkan makna rumus-rumus yang dipakai dalam tradisi Jawa untuk menentukan waktu pelaksanaan selamat kematian. Dalam Tabel 1 ditampilkan nama peringatan, hari peringatan, rumus untuk menentukan waktu peringatan dan makna rumus tersebut.

Tabel 1 Rumus untuk Menentukan Waktu Pelaksanaan Peringatan Kematian dan Maknanya

Nama Selamatan	Hari ke-	Rumus	Makna Rumus
<i>Geblage/Ngesur Lemah</i>	1	<i>jisarji</i>	hari kesatu dan pasaran kesatu
<i>Nelung dina</i>	3	<i>lusarlu</i>	hari ketiga dan pasaran ketiga
<i>Mitung dina</i>	7	<i>tusaro</i>	hari ke ketujuh dan pasaran kedua
<i>Matangpuluh dina</i>	40	<i>masarma</i>	hari kelima dan pasaran kelima.
<i>Nyatus dina</i>	100	<i>rosarma</i>	yaitu hari kedua dan pasaran kelima
<i>Mendhak sepisan</i>	354	<i>patsarpat</i>	hari keempat dan pasaran keempat
<i>Mendhak pindho</i>	708/709	<i>jisarlu/rosarpat</i>	hari kedua dan pasaran keempat
<i>Nyewu</i>	1000	<i>nemsarma</i>	hari keenam dan pasaran kelima

Misalkan seseorang yang meninggal pada hari Kamis-*Pahing* berarti hari *saptawara*-nya adalah Kamis dan hari *pasaran*-nya adalah *Pahing*. Peringatan hari ke-1 dilakukan dengan rumus *jisarji*, artinya hari *saptawara* kesatu adalah Kamis dan *pasaran* kesatu adalah *Pahing*. Peringatan hari ke-100 dilakukan dengan rumus *rosarma* yang berarti peringatannya dilakukan pada hari *saptawara* ke-2 (*ro* = *loro* = 2) dan hari *pasaran* ke-5 (*ma* = *lima* = 5). Karena hari *saptawara* kesatu adalah Kamis, maka hari *saptawara* ke-2 adalah Jumat. Karena hari *pasaran* kesatu adalah *Pahing*, maka hari *pasaran* ke-5 adalah *Legi*. Jadi, peringatan 40 hari dilakukan pada Jumat-*Legi*. Tanggal pada kalender Masehi dihitung 100 hari sejak tanggal kematiannya. Demikian untuk yang lain.

Pada Tabel 1, pengetahuan Matematika Jawa disimpan dan diawetkan dalam wujud narasi-narasi sastra *jisarji*, *lusarlu*, *tusaro*, *masarma*, *rosarma*, *patsarpat*, *jisarlu*, dan *nemsarma* (Prabowo, 2020). Matematika Jawa dibangun tanpa simbolisasi dan pelambangan yang kaku.

3.4 Model Matematika untuk Menentukan Nama Hari-Mingguan dan Hari-Pasaran

Untuk dapat menentukan saat hari pelaksanaan peringatan selamatan digunakan konsep modulo dalam teori bilangan (Sukirman, 1997). Langkah yang dilakukan adalah (1) menentukan nama hari-mingguan dan hari-pasaran, dan (2) menentukan tanggal pada Tahun Masehi yang bersesuaian. Langkah 1 dilakukan dengan konsep modulo dalam teori bilangan. Langkah kedua dilakukan dengan menghitung sampai dengan jatuhnya hari peringatan pada Tahun Masehi.

Misalkan k adalah hari yang akan diperingati, maka nama hari-mingguan dan hari-pasaran berturut-turut diberikan pada formula (1) dan (2):

$$k = 7n + x \quad (1)$$

$$k = 5n + y \quad (2)$$

dengan $k = 3, 7, 40, 100, 354, 708$, dan 1000 menyatakan hari saat dilaksanakannya peringatan, $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, dan 6 menyatakan nama hari pada hari-mingguan, dan $y = 0, 1, 2, 3$, dan 4 menyatakan nama hari dalam hari-pasaran (Prabowo *et al.*, 2020a). Untuk $x = 0$ menyatakan nama hari-mingguan pada saat meninggal sehingga untuk nilai-nilai x selanjutnya berarti hari-hari berikutnya setelah hari meninggal. Hal yang sama berlaku untuk y

3.5 Menentukan Tanggal Peringatan pada Kalender Masehi

Pada tahun/kalender Masehi, umur satu tahun adalah 365 hari dan 366 hari untuk tahun panjang. Penambahan 1 hari pada tahun panjang dilakukan pada bulan Februari sehingga umur bulan Februari menjadi 29 hari untuk setiap 4 tahun sekali. Berikut ini adalah Tabel 1 yang mendaftarkan umur setiap bulan pada Tahun Masehi.

Tabel 2 Umur Bulan (dalam hari) pada Tahun Masehi

Bulan	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
Umur	31	28/29	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31
Kumulatif	31	59/ 60	90/ 91	120/ 121	151/ 152	181/ 182	212/ 213	243/ 244	273/ 274	204/ 305	334/ 335	365/ 366

Selanjutnya, untuk menghitung sisa hari pada suatu bulan untuk tanggal tertentu digunakan formula (3). Misalkan tanggal maksimal pada setiap bulan adalah t , dan tanggal tersebut adalah a , maka sisa hari v adalah:

$$v = (t - a) + 1 \quad (3)$$

Sebagai contoh, sisa hari dalam bulan Juli sejak tanggal 6 Juli adalah $v = (31 - 6) + 1 = 26$ hari.

3.6 Aplikasi dengan Modulo Matematika

Prabowo dan Pramono (2014) telah membahas mengenai modulo dalam Matematika Jawa, beserta contoh penggunaannya. Misalkan seseorang meninggal pada tanggal 6 Juli 2017. Pada kalender Masehi, tanggal tersebut jatuh di hari Kamis-Pahing. Peringatan *geblake* adalah untuk $k = 0$ dan dilakukan pada hari yang sama pada saat meninggal, yaitu Kamis-Pahing, tanggal 6 Juli 2017. Dengan demikian, $x = 0$ menyatakan Kamis dan $y = 0$ menyatakan Pahing.

Peringatan selamatan 3 hari berarti $k = 3$ dilakukan pada hari ketiga setelah kematian, yaitu Minggu-Kliwon. Hasil tersebut diperoleh dengan formula (1) dan (2) sebagai berikut:

$$3 = 7 \cdot 0 + 3 \quad (4)$$

$$3 = 5 \cdot 0 + 3 \quad (5)$$

Dari formula (4) dan (5) diperoleh $x = 3$ yang menyatakan hari ketiga setelah hari kematian, yaitu hari Minggu. Selanjutnya, diperoleh $y = 3$ yang menyatakan hari ketiga setelah hari kematian, yaitu *Kliwon*. Dengan demikian, peringatan 3 hari dilakukan pada hari Minggu-*Kliwon* 3 hari setelah kematian, atau pada tanggal 9 Juli 2017. Dalam kalender Jawa, tanggal 8 Juli 2017 jam 16.00 sudah masuk hari Minggu-*Kliwon*, sehingga pelaksanaan peringatan dilakukan pada 8 Juli 2017 hari Sabtu-*Wage*, umumnya setelah Maghrib.

Dengan cara serupa, dapat ditentukan saat dilakukannya peringatan-peringatan lainnya. Hasilnya diberikan pada Tabel 3.

Tabel 3 Hasil Penentuan Hari-Hari Peringatan Kematian

Peringatan	Hari ke- k	$k = 7n + x$	x	Hari Mingguan	$k = 5n + y$	y	Hari Pasaran	Hasil Perhitungan	Tanggal Pelaksanaan Peringatan (Setelah pukul 16.00)
<i>Geblake</i>	0	$0 = 7 \cdot 0 + 0$	0	Kamis	$0 = 5 \cdot 0 + 0$	0	<i>Pahing</i>	6 Juli 2017	6 Juli 2017
<i>Nelung ndino</i>	3	$3 = 7 \cdot 0 + 3$	3	Minggu	$3 = 5 \cdot 0 + 3$	3	<i>Kliwon</i>	9 Juli 2017	8 Juli 2017
<i>Mitung ndino</i>	7	$7 = 7 \cdot 1 + 0$	0	Kamis	$7 = 5 \cdot 1 + 2$	2	<i>Wage</i>	13 Juli 2017	12 Juli 2017
<i>Matang puluh</i>	40	$40 = 7 \cdot 5 + 5$	5	Selasa	$40 = 5 \cdot 8 + 0$	0	<i>Pahing</i>	15 Agustus 2017	14 Agustus 2017
<i>Nyatus</i>	100	$100 = 7 \cdot 14 + 2$	2	Sabtu	$100 = 5 \cdot 20 + 0$	0	<i>Pahing</i>	14 Oktober 2017	13 Oktober 2017
<i>Pendhak pisan</i>	354	$354 = 7 \cdot 50 + 4$	4	Senin	$354 = 5 \cdot 70 + 4$	4	<i>Legi</i>	25 Juni 2018	24 Juni 2018
<i>Pendhak pindho</i>	708	$708 = 7 \cdot 101 + 1$	1	Jumat	$708 = 5 \cdot 141 + 3$	3	<i>Kliwon</i>	14 Juni 2019	13 Juni 2019
<i>Nguwis-uwisi</i>	1000	$1000 = 7 \cdot 142 + 6$	6	Rabu	$1000 = 5 \cdot 200 + 0$	0	<i>Pahing</i>	1 April 2020	31 Maret 2020

Sebagai catatan, hasil pada Tabel 3 dihitung dengan kalender Masehi. Sedangkan peringatan kematian perayaannya dilakukan dengan perhitungan kalender Jawa. Dengan demikian, pelaksanaan peringatan-peringatan tersebut dilakukan satu hari sebelumnya, umumnya pada sore hari menjelang maghrib. Dalam perhitungan kalender Jawa, waktu sore menjelang maghrib sudah bergeser ke waktu sehari berikutnya.

Secara umum, peringatan-peringatan kematian pada Tabel 3 dilaksanakan sehari sebelum tanggal pada kolom paling kanan. Hal ini disebabkan perhitungan pada Tabel 3 dilakukan dengan kalender Masehi, sedangkan peringatan kematian dilakukan berdasarkan kalender Jawa. Peralihan hari pada kalender Jawa dimulai pada pukul sore hari pada pukul 16.00, lebih awal dibanding pada kalender Masehi yang dimulai tengah malam pada pukul 00.00.

3.7 Aplikasi dengan Modulo Matematika Jawa

Modulo Matematika secara konseptual sama dengan modulo Matematika Jawa. Modulo Matematika Jawa dibangun dengan konsep pengulangan berlanjut hingga diperoleh sisa antara 1 dan bilangan pengurangnya. Sedangkan modulo Matematika mengijinkan sisa 0 dengan sisa maksimum adalah bilangan pengurangnya dikurangi 1.

Misalkan k adalah hari yang akan diperingati, maka nama hari-mingguan dan hari-*pasaran* berturut-turut diberikan pada formula (6) dan (7):

$$k = 7n + m \quad (6)$$

$$k = 5n + p \quad (7)$$

dengan $k = 3, 7, 40, 100, 354, 708$, dan 1000 menyatakan hari saat dilaksanakannya peringatan, $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ dan 7 menyatakan nama hari pada hari-mingguan, dan $p = 1, 2, 3, 4$ dan 5 menyatakan nama hari dalam hari-*pasaran*. Untuk $m = 1$ menyatakan nama hari-mingguan pada saat meninggal sehingga untuk nilai-nilai m selanjutnya berarti hari-hari berikutnya setelah hari meninggal. Hal yang sama berlaku untuk p .

Contoh berikut ini dikerjakan dengan konsep modulo dalam Matematika Jawa. Misalkan seseorang meninggal pada tanggal 6 Juli 2017 (Asumsi sebelum pukul 16.00). Pada kalender Masehi, tanggal tersebut jatuh di hari Kamis-*Pahing*.

Peringatan *geblake* adalah untuk $k = 1$ dan dilakukan pada hari yang sama pada saat meninggal, yaitu Kamis-*Pahing*, tanggal 6 Juli 2017.

$m = 1$ menyatakan Kamis

$p = 1$ menyatakan *Pahing*.

Peringatan selamatan 3 hari berarti $k = 3$ dilakukan pada hari ketiga setelah kematian, yaitu Sabtu-*Wage*. Hasil tersebut diperoleh dengan formula (6) dan (7) sebagai berikut:

$$3 = 7 \cdot 0 + 3 \quad (8)$$

$$3 = 5 \cdot 0 + 3 \quad (9)$$

Dari formula (8) dan (9) diperoleh

$m = 3$ menyatakan hari ketiga dihitung dari hari kematian, yaitu hari Sabtu.

$p = 3$ menyatakan hari ketiga dihitung dari hari kematian, yaitu *Wage*.

Dengan demikian, peringatan 3 hari dilakukan pada hari Sabtu-*Wage* yang dihitung 3 hari mulai hari kematian, atau pada tanggal 8 Juli 2017. Namun, pelaksanaannya dilakukan setelah pukul 16.00 karena setelah waktu tersebut sudah masuk hari Minggu-*Kliwon*.

Dengan cara serupa, dapat ditentukan saat dilakukannya peringatan-peringatan lainnya. Hasilnya diberikan pada Tabel 4. Dengan mengacu pada Tabel 3 dan Tabel 4 dapat disimpulkan bahwa penggunaan modulo Matematika dan modulo Matematika Jawa memberikan hasil yang tepat sama.

Tabel 4 Hasil Penentuan Hari-Hari Peringatan Kematian

Peringatan	Hari ke- k	$k = 7n + m$	m	Hari Saptawara	$k = 5n + p$	p	Hari Pasaran	Hasil Perhitungan dan Tanggal Pelaksanaan Peringatan (Setelah Pukul 16.00)
<i>Geblake</i>	1	$1 = 7 \cdot 0 + 1$	1	Kamis	$1 = 5 \cdot 0 + 1$	1	<i>Pahing</i>	6 Juli 2017
<i>Nelung ndino</i>	3	$3 = 7 \cdot 0 + 3$	3	Sabtu	$3 = 5 \cdot 0 + 3$	3	<i>Wage</i>	8 Juli 2017
<i>Mitung ndino</i>	7	$7 = 7 \cdot 0 + 7$	7	Rabu	$7 = 5 \cdot 1 + 2$	2	<i>Pon</i>	12 Juli 2017
<i>Matang puluh dino</i>	40	$40 = 7 \cdot 5 + 5$	5	Senin	$40 = 5 \cdot 7 + 5$	5	<i>Legi</i>	14 Agustus 2017
<i>Nyatus dino</i>	100	$100 = 7 \cdot 14 + 2$	2	Jumat	$100 = 5 \cdot 19 + 5$	5	<i>Legi</i>	13 Oktober 2017
<i>Pendhak pisan</i>	354	$354 = 7 \cdot 50 + 4$	4	Minggu	$354 = 5 \cdot 70 + 4$	4	<i>Kliwon</i>	24 Juni 2018
<i>Pendhak pindho</i>	708	$708 = 7 \cdot 101 + 1$	1	Kamis	$708 = 5 \cdot 141 + 3$	3	<i>Wage</i>	13 Juni 2019
<i>Nguwis-uwisi</i>	1000	$1000 = 7 \cdot 142 + 6$	6	Selasa	$1000 = 5 \cdot 199 + 5$	5	<i>Legi</i>	31 Maret 2020

3.8 Bagaimanakah Formula-Formula Tradisional Jawa Bekerja?

Bagaimanakah formula-formula tradisional Jawa pada Tabel 1 bekerja? Penggunaan modulo Matematika dan modulo Matematika Jawa memberikan hasil yang tepat sama. Selanjutnya, modulo Matematika Jawa akan digunakan untuk menentukan tanggal pelaksanaan peringatan dengan menggunakan formula-formula pada Tabel 1.

Pandang modulo Matematika Jawa pada formula (6) dan (7). Setiap peringatan pada hari ke- k dengan $k = 1, 3, 7, 40, 100, 354, 708$, dan 1000 dapat ditentukan nilai m dan p . Nilai-nilai m dan p pada Tabel 6 diperoleh dari formula (6) dan (7).

Tabel 5 Nilai m dan p untuk Setiap Hari Peringatan

Hari Ke	m	p	Rumus Mingguan $m = 1 + x$	Rumus Pasaran $p = 1 + y$
1	1	1	$1 + 0$	$1 + 0$
3	3	3	$1 + 2$	$1 + 2$
7	7	2	$1 + 6$	$1 + 1$
40	5	5	$1 + 4$	$1 + 4$
100	2	5	$1 + 1$	$1 + 4$
354	4	4	$1 + 3$	$1 + 3$
708	1	3	$1 + 0$	$1 + 2$
1000	6	5	$1 + 5$	$1 + 4$

Pada Tabel 5 juga disertakan Rumus Mingguan dan Rumus *Pasaran*. Kedua rumus tersebut dinyatakan sebagai jumlahan 1 dengan suatu angka tertentu sehingga diperoleh nilai-nilai m dan p . Jika rumus mingguan dan rumus pasaran berturut-turut diberi simbol x dan y , maka berlaku

$$m = 1 + x \quad (10)$$

$$p = 1 + y \quad (11)$$

Angka tertentu tersebut yaitu x dan y menentukan nama hari mingguan dan hari *pasaran* pada saat pelaksanaan peringatan dilakukan. Dengan memperhatikan nilai-nilai m dan p pada Tabel 5, maka terciptalah narasi-narasi sastra Jawa dalam Matematika Jawa yaitu *jisarji*, *lusarlu*, *tusaro*, *masarma*, *rosarma*, *patsarpat*, *jisarlu*, dan *nemsarma*. Narasi-narasi tersebut menggunakan pelafalan bilangan dengan bahasa Jawa. Sebagai catatan, pelafalan bilangan dengan bahasa Jawa adalah *ji* = *siji* = 1, *ro* = *loro* = 2, *lu* = *telu* = 3, *pat* = *papat* = 4, *ma* = *lima* = 5, *nem* = *enem* = 6, dan *tu* = *pitu* = 7.

Selanjutnya, angka-angka yang menjadi nilai untuk m dan p diberi makna atau penafsiran. Sebagai contoh, misalnya kematian terjadi pada hari Kamis-*Pahing* tanggal 6 Juli 2017, maka hari Kamis diberi simbol 1. Demikian juga *Pahing* diberi simbol 1. Angka-angka selanjutnya mengikuti urutan nama-nama hari pada masing-masing jenis siklus mingguan dan *pasaran*. Hasilnya disajikan pada Tabel 6 kolom 2 dan 3.

Tabel 6 Nilai m dan p dan Maknanya untuk Setiap Hari Peringatan

Hari Ke	Nilai m dan maknanya		Nilai p dan maknanya		Rumus Mingguan $m = 1 + x$			Rumus <i>Pasaran</i> $p = 1 + y$		
1	1	Kamis	1	<i>Pahing</i>	1 + 0	Kamis + 0	Kamis	1 + 0	<i>Pahing</i> + 0	<i>Pahing</i>
3	3	Sabtu	3	<i>Wage</i>	1 + 2	Kamis + 2	Sabtu	1 + 2	<i>Pahing</i> + 2	<i>Wage</i>
7	7	Rabu	2	<i>Pon</i>	1 + 6	Kamis + 6	Rabu	1 + 1	<i>Pahing</i> + 1	<i>Pon</i>
40	5	Senin	5	<i>Legi</i>	1 + 4	Kamis + 4	Senin	1 + 4	<i>Pahing</i> + 4	<i>Legi</i>
100	2	Jumat	5	<i>Legi</i>	1 + 1	Kamis + 1	Jumat	1 + 4	<i>Pahing</i> + 4	<i>Legi</i>
354	4	Minggu	4	<i>Kliwon</i>	1 + 3	Kamis + 3	Minggu	1 + 3	<i>Pahing</i> + 3	<i>Kliwon</i>
708	1	Kamis	3	<i>Wage</i>	1 + 0	Kamis + 0	Kamis	1 + 2	<i>Pahing</i> + 2	<i>Wage</i>
1000	6	Selasa	5	<i>Legi</i>	1 + 5	Kamis + 5	Selasa	1 + 4	<i>Pahing</i> + 4	<i>Legi</i>

Pada Tabel 6, nilai-nilai x dan y juga menentukan nama-nama hari pada siklus mingguan dan pasaran. Dengan mengacu pada nilai-nilai x dan y diperoleh konsep modulo pada Matematika dan dengan mengacu pada nilai-nilai m dan p diperoleh konsep modulo pada Matematika Jawa.

4. Kesimpulan dan Saran

Model yang dihasilkan baik dengan menggunakan modulo Matematika dan modulo Matematika Jawa dapat digunakan secara lebih umum, tidak hanya terbatas pada delapan buah perayaan selamatan. Kesimpulan yang diperoleh dari hasil penelitian ini adalah:

1. tanggal-tanggal peringatan kematian dalam tradisi Jawa dapat ditentukan dengan dua langkah:
 - a. Menentukan Nama *Saptawara* dan *Pancawara*

$$k = 7n + s$$

$$k = 5n + p$$
 - b. Menentukan Tanggal Peringatan pada Kalender Masehi

$$v = (t - a) + 1$$
 2. perhitungan dengan modulo matematika, tanggal pelaksanaan harus dimajukan 1 hari dari tanggal yang diperoleh dari perhitungan, namun pelaksanaannya harus dilakukan setelah pukul 16.00;
 3. perhitungan dengan modulo matematika Jawa, tanggal pelaksanaan sama dengan tanggal yang diperoleh perhitungan, namun pelaksanaannya harus dilakukan setelah pukul 16.00;
 4. penelitian ini menunjukkan bahwa tradisi-tradisi yang berlangsung dalam kehidupan sehari-hari masyarakat Jawa dapat dilacak akar dan landasan formalnya dalam konsep-konsep matematika yang saat ini dipelajari, misalnya modulo; dan
 5. kemampuan matematis menentukan tanggal-tanggal peringatan kematian dalam tradisi Jawa disebut “menerawang” sehingga orang Jawa diberi atribut manusia *sakti-mandraguna*, *weruh sakdurunge winarah*. Padahal, kemampuan ini sangat logis dan ilmiah.
- Saran yang dapat dikerjakan terkait dengan pembahasan pada artikel ini adalah:
1. penentuan *weton* dilakukan dengan modulo 35;
 2. penentuan waktu pelaksanaan peringatan kematian dilakukan dengan modulo 35; dan
 3. penentuan tanggal pelaksanaan peringatan kematian pada Kalender Masehi menggunakan *Julian Date* (Prabowo *et al.*, 2020b).

Daftar Pustaka

- NN. (202). Haul. Tersedia: <https://id.wikipedia.org/wiki/Haul>. [Diakses: 29 Oktober 2020].
- Prabowo, A. (2016). *Menentukan Nama Hari Kelahiran Tanpa Error*. Purwokerto: UPT Penerbitan dan Percetakan UNSOED.
- Prabowo, A. (2020). *Narasi-Narasi Sastrawi dalam Matematika Jawa*. Kompasiana.com. [Diakses: 18 Juni 2020].
- Prabowo, A. dan Sidi, P. (2014). *Permulaan Matematika dalam Peradaban Bangsa-Bangsa: Kontribusi Budaya Jawa dalam Matematika*. Purwokerto: UPT Penerbitan dan Percetakan UNSOED.
- Prabowo, A., Mamat, M. and Sukono. (2019a). The Zero Sign on Inscription and Manuscript based on the Historical Supply Chain Management: A Case Study of Indonesia Archipelago Before Majapahit Era. *Journal of Supply and Chain Management*. **8**(3): 172-182.
- Prabowo, A., Mamat, M. dan Sukono. (2017a). Model Matematika untuk Menentukan Lamanya Puasa Ramadhan pada Komunitas Islam Aboge di Cikakak. *Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Matematika Etnomatnesia. Univeristas Sarjanawiyata Tamansiswa*. 25 November 2017.

- Prabowo, A., Mamat, M., Sukono and Napitupulu, H. (2017b). The Mathematical Formula for Determining the Name of the Pancawara Day on the Masehi Calendar. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*. **51**(2): 162-166.
- Prabowo, A., Mamat, M., Sukono and Ngadiman. (2019b). Carrying Javanese Local Wisdom in Mathematical Model. *Journal of Physics: IOP Conference Series*
- Prabowo, A., Sidi, P., and Sukono. (2016). Application of Chinese Remainder Theorem in Determining of Selapanan Day Name. *Proceeding IORA ICOR 2016*.
- Prabowo, A., Sidi, P., Mamat, M. and Sukono. (2017c). Mathematical Model for Determining of Wuku Name in Javanese Culture in Indonesia. *Journal of Engineering and Applied Science*. **12**(18): 4613-4616.
- Prabowo, A., Sugandha, A. dan Tripena, A. (2017d). Dimensi Waktu dalam Penanggalan Prasasti. *Prosiding Seminar Nasional dan Aplikasinya I*. Jurusan Matematika, Universitas Lambung Mangkurat.
- Prabowo, A., Sugianto, dan Wahyuni, I. T. (2015). Tiga Cara Menentukan Nama Wuku dalam Pawukon Saka. *Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika UNSOED*. **7**(1): 30-47.
- Prabowo, A., Sukono, Mamat, M., Wahyudin, and Budiono, R. (2020a). Mathematical Model for Commemoration of Death in Javanese Tradition. *International Journal of Advanced Science and Technology*. **29**(05):162 – 168.
- Prabowo, A., Tripena, A., Sugandha, A. and Riyadi, S. (2019c). On the Javanese Ethnoastronomy: Time Dimension on the Calendrical Inscription on Majapahit Era until Now. *Journal of Physics: IOP Conference Series*.
- Prabowo, A., Mamat, M., Sukono, Sidi, P., and Wahyudin. (2020b). Ethnomodelling: Aboge Cikakak Calendar Conversion into Gregorian Calendar using Brute Force Algorithm. *International Journal of Advanced Science and Technology*. **29**(07):1633 – 1646.
- Sukirman. (1997). Ilmu Bilangan. Jakarta: Universitas Terbuka.

PEMETAAN RESIKO BENCANA GEMPABUMI TEKTONIK DI KAWASAN EKS-KARESIDENAN BANYUMAS BERDASARKAN DATA KEGEMPAAN MASA LALU

Sehah

Jurusan Fisika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman
e-mail: seah@unsoed.ac.id

Abstrak. Pemetaan resiko bencana gempabumi tektonik di Kawasan Eks-Karesidenan Banyumas Jawa Tengah telah dilakukan. Pemetaan didasarkan hasil perhitungan percepatan getaran tanah maksimum (*Peak Ground Acceleration*, PGA). Manfaat yang diharapkan adalah sebagai sumber informasi tentang tingkat resiko kawasan terhadap bencana gempabumi, sehingga dapat dijadikan sebagai acuan dalam pembangunan infrastruktur, perencanaan tata ruang wilayah, dan menyusun panduan teknis mitigasi bencana gempabumi. Hasil yang diperoleh adalah peta tingkat resiko gempabumi tektonik di seluruh Pulau Jawa dan wilayah Eks-Karesidenan Banyumas. Berdasarkan peta itu, resiko bencana gempabumi di Pulau Jawa terbagi atas 10 tingkat, berkisar dari resiko sangat kecil (< 25 gal) hingga resiko besar III ($200 - 300$ gal). Sedangkan kawasan Eks-Karesidenan Banyumas terbagi atas empat tingkat resiko gempabumi tektonik, yang terdiri atas resiko kecil ($25 - 50$ gal), resiko sedang I ($50 - 75$ gal), resiko sedang II ($75 - 100$ gal), dan resiko sedang III ($100 - 125$ gal). Kecenderungan tingkat resiko gempabumi tektonik kawasan Eks-Karesidenan Banyumas adalah semakin ke arah tenggara semakin besar.

Kata Kunci: Data kegempaan, seismisitas, gempabumi tektonik, tingkat resiko, kawasan Eks-Karesidenan Banyumas.

1. Pendahuluan

Pulau Jawa merupakan salah satu pulau di Indonesia yang terletak di zona pertemuan dua lempeng tektonik besar bumi yaitu Lempeng Eurasia dan Lempeng Indo-Australia. Lempeng Indo-Australia yang merupakan kerak samudera selalu bergerak relatif ke utara dengan kelajuan kurang lebih 7 cm per tahun menunjam di bawah Lempeng Eurasia. Suatu saat Lempeng Indo-Australia ini mengalami gesekan atau benturan sehingga sebagian tubuh Lempeng Eurasia retak atau patah. Akibatnya terjadi gempabumi yang sering disertai tsunami, serta naiknya magma ke permukaan. Pulau-pulau yang terletak pada zona tersebut, termasuk Pulau Jawa merupakan zona yang rawan terjadi bencana gempabumi tektonik (Natawidjaya, 1995). Rekaman seismograf menunjukkan bahwa gempabumi sering terjadi di Pulau Jawa. Bahkan apabila gempabumi dengan intensitas kecil diperhitungkan, maka hampir setiap hari terjadi gempabumi. Salah satu contoh gempabumi besar adalah Gempa Yogyakarta yang berpusat di selatan wilayah ini yang terjadi pada hari Sabtu, 27 Mei 2006. Sebulan kemudian, terjadi gempabumi disertai tsunami yang berpusat di selatan Pangandaran Kabupaten Ciamis Jawa Barat, yang efek getaran dan kerusakannya dirasakan hingga wilayah Eks-Karesidenan Banyumas (Rovicky, 2006).

Wilayah Eks-Karesidenan Banyumas yang sering mengalami gempabumi tektonik adalah Cilacap. Gempabumi berkekuatan 7,1 SR pernah mengguncang Cilacap pada tanggal 4 April 2011 dengan jarak episenter 293 kilometer arah barat daya Kabupaten Cilacap (Syurkani, 2011). Gempabumi berkekuatan 6,3 SR juga mengguncang Cilacap pada tanggal 26 April 2011 berkedalaman 24 kilometer dan jarak episenter 120 km pada arah yang sama (Wirasatria, 2011). Gempabumi ini diikuti oleh gempa susulan berkekuatan 5,0 SR dan kedalaman 70 km serta jarak episenter 108 km. Selanjutnya pada tanggal 1 Juli 2011, wilayah Cilacap kembali diguncang gempabumi berkekuatan 5,3 SR dengan lokasi episenter pada posisi $08,73^{\circ}$ LS dan $108,66^{\circ}$ BT (Huda,

2011). Berdasarkan kenyataan ini apabila suatu wilayah pernah mengalami gempabumi tektonik sekali atau beberapa kali, maka bisa jadi wilayah tersebut akan mengalami kejadian gempabumi serupa dengan kekuatan yang bervariasi pada masa berikutnya. Hal ini merupakan konsekuensi bahwa terjadinya gempabumi tektonik di suatu wilayah terkait dengan aktivitas patahan atau sesar di sekitarnya, sehingga wilayah tersebut dikategorikan sebagai kawasan rawan gempabumi (Najoran, 2004).

Berdasarkan keadaan seismotektonik dengan tingkat resiko gempabumi yang cukup tinggi, maka usaha mitigasi bencana gempabumi sangat dibutuhkan. Bagaimanapun bencana gempabumi tidak dapat diprediksi, ditolak, atau dihindari, tetapi resiko bencananya diusahakan dapat diminimalkan melalui usaha mitigasi. Mitigasi bencana gempabumi mencakup berbagai usaha dan persiapan sedemikian rupa, sehingga apabila suatu saat terjadi bencana gempabumi di wilayah tersebut maka korban jiwa dan kerusakan materi dapat dikurangi sekecil mungkin (Anonim, 2007). Salah satu upaya mitigasi bencana gempabumi yang dapat dilakukan adalah pembuatan peta yang menggambarkan tingkat kerawanan ataupun resiko suatu wilayah terhadap bencana gempabumi. Peta tersebut bisa dibuat berdasarkan data data seismisitas selama beberapa puluh tahun, bahkan ratusan tahun. Data tersebut diolah melalui beberapa tahap sehingga diperoleh nilai percepatan getaran tanah maksimum (*Peak Ground Acceleration*, PGA). Berdasarkan data PGA tersebut, maka dapat dihitung dan dipetakan sebaran tingkat resiko bencana gempabumi tektonik di suatu kawasan (Kirbani dkk., 2006).

Percepatan getaran tanah (*ground acceleration*) adalah nilai percepatan getaran tanah akibat bencana gempabumi. Nilai percepatan getaran tanah sering digunakan untuk menggambarkan tingkat resiko suatu kawasan terhadap bencana gempabumi yang terjadi. Namun yang lazim digunakan adalah Percepatan Tanah Maksimum (*Peak Ground Acceleration*, PGA), yaitu percepatan getaran tanah yang tertinggi yang pernah terjadi pada suatu kawasan akibat gempabumi. Satuan yang digunakan dalam pengukuran PGA adalah cm/dt^2 atau disebut *gal* (Kirbani dkk., 2006). Para ahli Geofisika sering menggunakan percepatan getaran tanah maksimum sebagai parameter untuk menentukan dan memetakan tingkat resiko suatu kawasan terhadap bencana gempabumi (Supriatna dkk., 2010). Getaran tanah akibat gempabumi dapat diasumsikan sebagai gerak harmonik sederhana, sehingga nilai percepatannya dapat diperoleh dari persamaan gerak harmonik sederhana, yaitu (Giancolli, 1991):

$$x = A \sin \omega_0 t \quad (1)$$

Jika dideferensialkan, maka perubahan laju getarannya dapat dinyatakan:

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0 A \cos \omega_0 t \quad (2)$$

Jika persamaan (2) dideferensialkan maka diperoleh percepatan getaran, yaitu:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 A \sin \omega_0 t \quad (3)$$

Agar diperoleh nilai percepatan getaran tanah maksimum, nilai $\sin \omega_0 t$ dalam persamaan (3) harus bernilai maksimum, dimana nilai maksimum $\sin \omega_0 t$ adalah 1. Dengan demikian ketika percepatannya maksimum, maka persamaan (3) dapat dituliskan:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 A \quad (4)$$

Jika diambil nilai $\frac{d^2x}{dt^2} = a$ dan $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, maka diperoleh nilai percepatan getaran tanah yang sebanding dengan amplitudo dan berbanding terbalik dengan kuadrat dari periode getaran tanah, atau dapat dituliskan:

$$a = A \frac{4\pi^2}{T_0^2} \quad (5)$$

dengan a adalah percepatan getaran tanah maksimum (*gal*), A adalah *amplitude* (cm), dan T_0 menyatakan periode getaran tanah (dt).

Kenyataannya getaran tanah akibat gempa bumi tidak sesuai dengan gerak harmonik sederhana, karena setiap kejadian gempa bumi selalu menunjukkan sifat getaran yang random dengan karakteristik yang berbeda. Oleh karena itu, untuk mengetahui nilai percepatan getaran tanah maksimum digunakan peralatan yang dapat merekam getaran tanah akibat gempa secara akurat. Peralatan yang umum digunakan untuk mengetahui nilai percepatan getaran tanah maksimum adalah *accelerograph*, namun di Indonesia peralatan ini sangat terbatas. Oleh sebab itu, mengingat pentingnya data percepatan getaran tanah, maka ahli Geofisika telah mengembangkan persamaan empiris yang dapat dimanfaatkan untuk memperoleh nilai percepatan getaran tanah, tanpa harus melakukan pengukuran menggunakan peralatan *accelerograph*. Salah satunya adalah persamaan empiris yang disusun oleh Fukushima dan Tanaka (1990), yaitu:

$$\log a = 0,41MS - \log \left[R + 0,033 \times 10^{0,41MS} \right] - 0,0034R + 1,28 \quad (6)$$

dimana a adalah percepatan tanah, MS adalah *magnitude* gelombang permukaan, dan R adalah jarak hiposenter. MS diperoleh dari konversi *magnitude* gelombang *body* (MB), sedangkan R diperoleh dari penjumlahan pythagoras antara kedalaman gempa (h) dan jarak episenter gempa (Δ).

2. Metode Penelitian

Data seismisitas gempa bumi tektonik disediakan oleh Badan Meteorologi Klimatologi dan Geofisika (BMKG) Pusat Jakarta melalui Stasiun Geofisika Banjarnegara. Proses pengolahan dan interpretasi data dilakukan di Laboratorium Elektronika, Instrumentasi, dan Geofisika, Fakultas MIPA, Universitas Jenderal Soedirman, Purwokerto. Data seismisitas masa lalu yang diakses dibatasi untuk kejadian gempa tektonik di Pulau Jawa dan sekitarnya pada tahun 1903 – 2006 (103 tahun). Adapun daerah yang menjadi target penelitian adalah kawasan Eks-Karesidenan Banyumas, yang meliputi Kabupaten Cilacap, Kabupaten Banyumas, Kabupaten Purbalingga, dan Kabupaten Banjarnegara, serta Kabupaten Kebumen sebagai tambahan.

Secara lengkap, bahan dan peralatan yang diperlukan pada penelitian dapat dilihat di **Tabel 1**.

Tabel 1. Daftar Bahan dan Peralatan yang Digunakan Dalam Penelitian

No.	Nama Alat	Jumlah
1	Data gempabumi hasil rekaman <i>seismograph</i> di berbagai <i>station</i> yang merekam kejadian gempa di pesisir selatan Jawa Tengah kurun waktu 1903 – 2006, yang meliputi: • Data <i>origine time</i> kejadian gempabumi • Data posisi lintang dan bujur (episenter) • Data kedalaman gempa (hiposenter) • Data magnitude gempa dalam bentuk <i>Magnitude Body Waves (MB)</i>	1 set
2	Peta topografi dan geologi lengkap daerah penelitian	2 set
3	Perangkat lunak Microsoft Excel 2007	1 paket
4	Perangkat lunak Arc-View GIS 3.3	1 paket
5	Perangkat lunak Spatial Analyst 2.0	1 paket
6	Perangkat lunak Surfer versi 7	1 paket
7	Perangkat lunak Paint in Window 7	1 paket
8	Laptop atau PC dan Printer	1 set

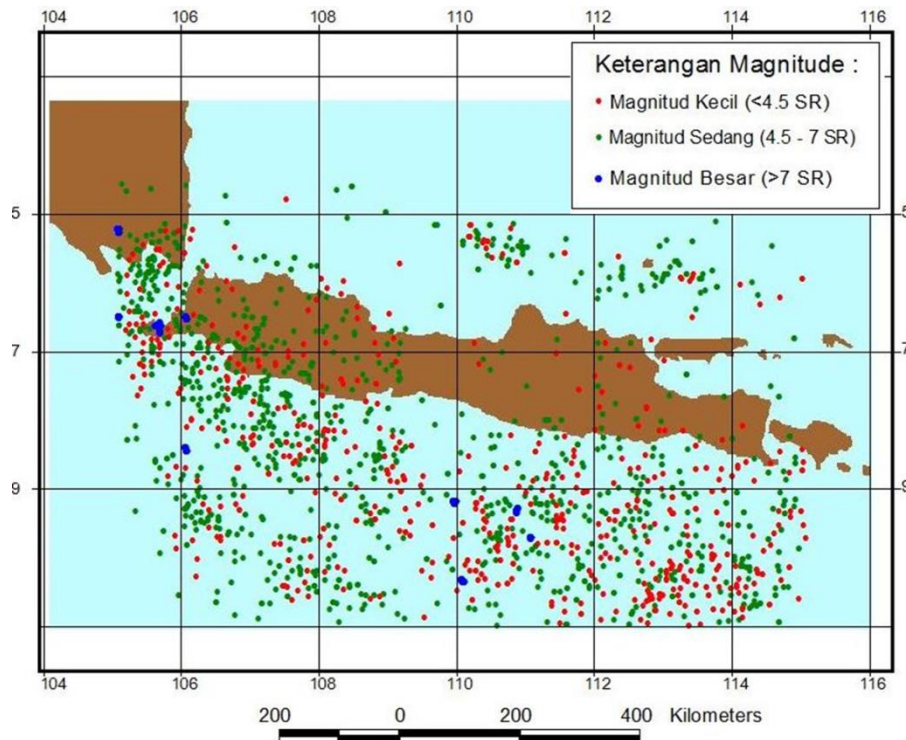
Tahapan kegiatan yang dilakukan di dalam penelitian meliputi mengakses dan mengekstrak data seismisitas gempabumi tektonik tahun 1903 – 2006 sesuai dengan posisi geografis daerah penelitian, membuat peta seismotektonik daerah penelitian, membagi daerah penelitian dalam beberapa satuan grid, menghitung jarak episenter gempa terhadap setiap titik grid, mengkonversi nilai magnitudo gempabumi dari besaran *magnitude body* (M_b) menjadi *magnitude surface* (M_s), menghitung nilai percepatan getaran tanah di setiap titik grid dari seluruh sumber gempabumi berdasarkan perumusan Fukushima dan Tanaka (1990), menentukan nilai percepatan tanah maksimum pada setiap titik grid, membuat peta percepatan tanah maksimum, membagi zona pada peta percepatan tanah maksimum menjadi beberapa tingkat resiko bencana gempabumi tektonik, serta membuat peta tingkat resiko bencana gempabumi tektonik untuk seluruh daerah penelitian.

3. Hasil Dan Pembahasan

Data seismisitas gempabumi tektonik telah berhasil diakses dari BMKG untuk kejadian gempa tahun 1903 – 2006. Data yang diperoleh terdiri atas posisi geografis lintang dan bujur, kedalaman pusat gempa, serta kekuatan gempa atau *Magnitude Body* (MB). Data gempabumi yang diakses terletak pada posisi 5°LS – 10°LS dan 105°BT – 115°BT. Sedangkan jumlah kejadian gempabumi tektonik yang tercatat adalah 1.898 kali; terdiri atas gempabumi kecil 547 kali, gempabumi sedang 1.342 kali, dan gempabumi tektonik besar 9 kali. Peta seismotektonik yang menunjukkan sebaran gempabumi tektonik berdasarkan kekuatannya dapat dilihat pada **Gambar 1**. Jumlah kejadian gempabumi tektonik berdasarkan kekuatan atau magnitudenya didominasi oleh gempabumi sedang sejumlah 1.342 kali.

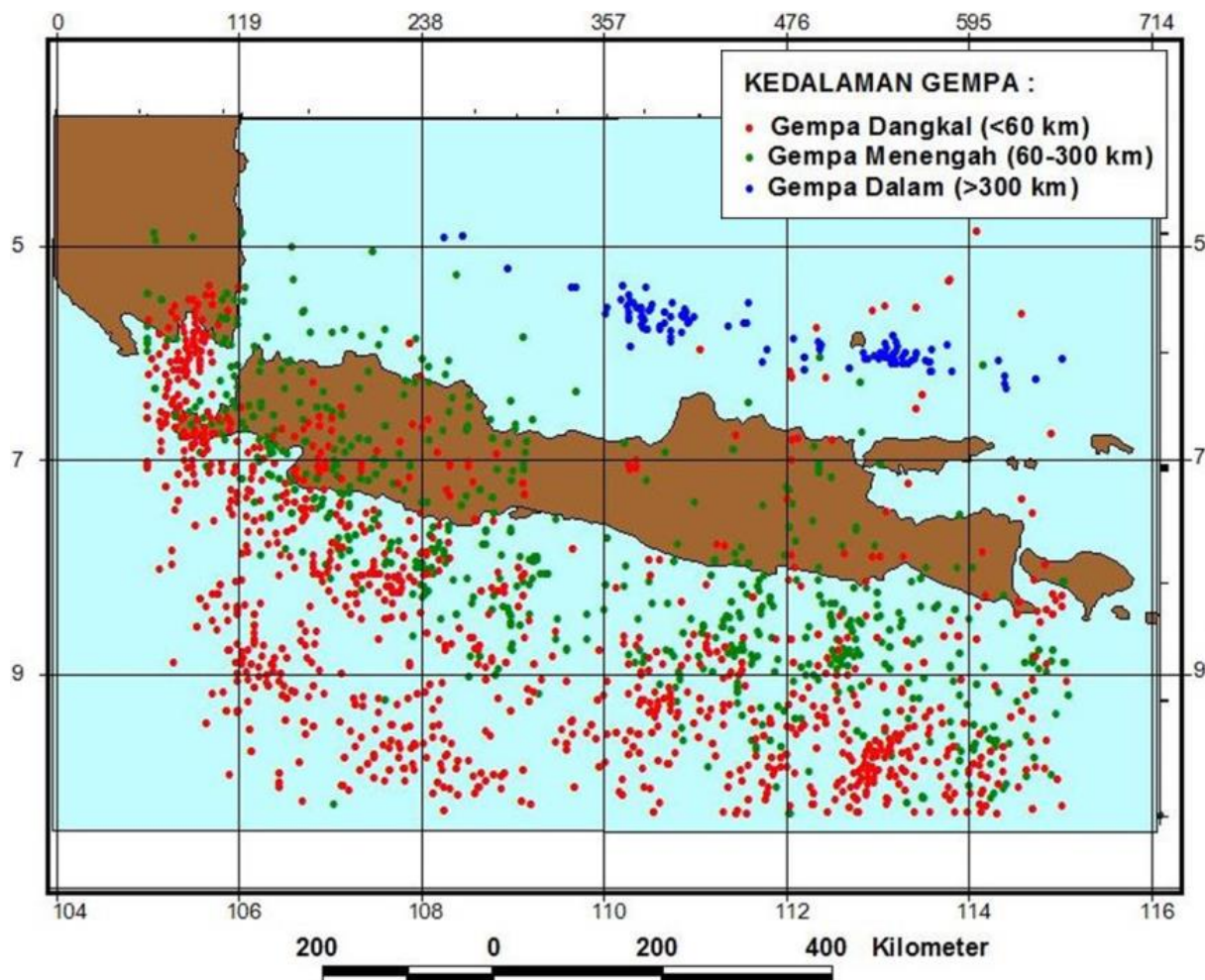
Sebagian besar gempabumi terjadi di selatan Pulau Jawa akibat aktivitas Lempeng Indo-Australia yang bergerak menunjam ke bawah Lempeng Eurasia. Lempeng Indo-Australia senantiasa bergerak relatif ke utara mendesak Lempeng Eurasia, sehingga bagian ujung Lempeng Eurasia

mengalami deformasi, sekaligus penimbunan energi secara perlahan. Suatu saat deformasi yang dialami bagian Lempeng Eurasia dapat melampaui batas elastisitasnya, sehingga terjadi patahan (*fracture*). Gejala tersebut ditandai dengan getaran gempa yang merupakan upaya untuk melepaskan timbunan energi deformasi melalui patahan.



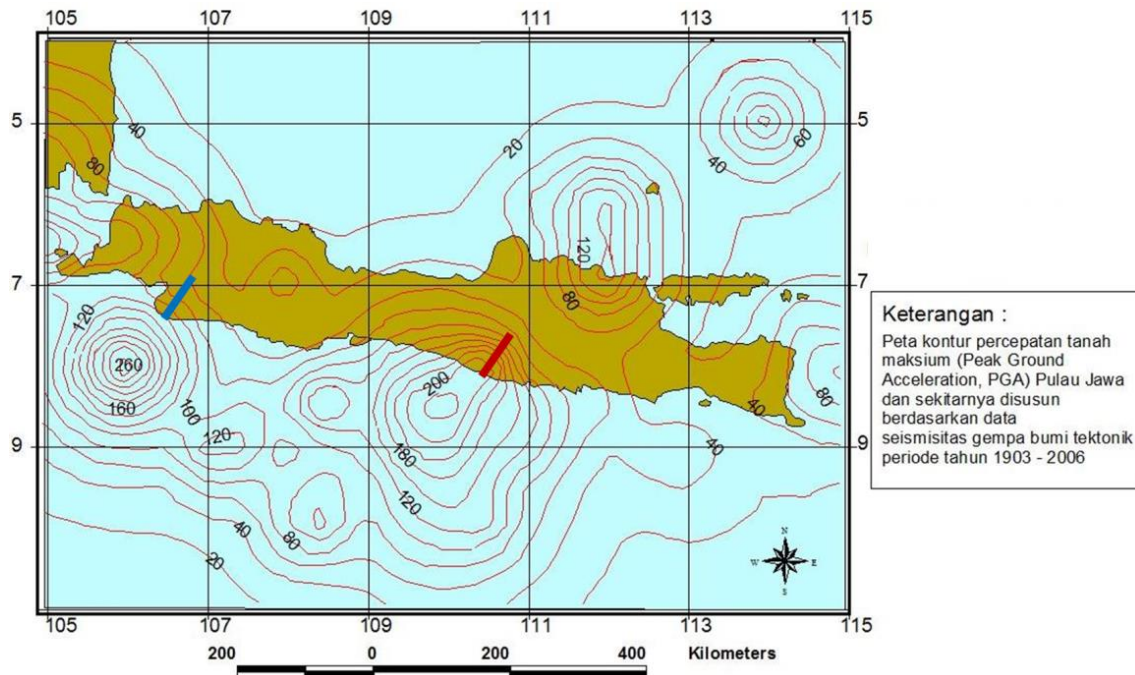
Gambar 1. Peta sebaran pusat gempabumi tektonik berdasarkan kekuatan (*magnitude*) periode tahun 1903 – 2006 di Pulau Jawa dan sekitarnya.

Sebaran pusat gempabumi tektonik berdasarkan kedalamannya bisa dilihat pada **Gambar 2**. Jumlah kejadian gempa tektonik berdasarkan kedalamannya didominasi gempa dangkal sejumlah 987 kali, kemudian disusul gempa menengah 793 kali, serta gempa dalam 118 kali. Sebagian besar gempabumi dangkal terjadi di selatan Pulau Jawa, karena umumnya gempa jenis ini terjadi akibat pelepasan energi deformasi di sepanjang zona tumbukan (*subduction zone*) di sekitar atau dekat permukaan antara Lempeng Indo-Australia dan Lempeng Eurasia (palung samudera). Selanjutnya semakin ke arah utara, maka kedalaman pusat gempabumi semakin bertambah, karena lokasi pusat gempabumi mengikuti arah penunjaman Lempeng Indo-Australia ke bawah Lempeng Eurasia. Berdasarkan fenomena ini, gempabumi dangkal banyak terjadi di selatan Pulau Jawa, gempabumi menengah di tengah Pulau Jawa, sedangkan gempabumi dalam hampir semuanya terjadi di utara Pulau Jawa.



Gambar 2. Peta Sebaran Pusat Gempabumi Tektonik Berdasarkan Kedalaman Periode Tahun 1903 – 2006 di Pulau Jawa dan Sekitarnya

Peta sebaran *magnitude* dan kedalaman gempabumi tektonik sebagaimana ditunjukkan pada **Gambar 1** dan **Gambar 2**, belum bisa digunakan sebagai dasar untuk menggambarkan dampak gempabumi yang terjadi di suatu wilayah daratan. Untuk memperoleh gambaran mengenai resiko gempabumi tektonik di wilayah Pulau Jawa, maka perlu dihitung nilai percepatan tanah maksimum (*Peak Ground Acceleration*, PGA) pada setiap titik grid yang tersebar di permukaan Pulau Jawa. Perhitungan nilai PGA dilakukan menggunakan persamaan empiris yang ditulis Fukushima dan Tanaka (1990), seperti persamaan (6). Nilai PGA yang diperoleh pada setiap titik grid di atas Pulau Jawa, selanjutnya dibikin peta menggunakan perangkat lunak Surfer versi 7, Spatial Analyst versi 2.0, dan Arc-View versi 3.3 menjadi sebuah peta kontur PGA sebagaimana dapat dilihat pada **Gambar 3**.



Gambar 3. Peta Percepatan Tanah Maksimum (*Peak Ground Acceleration, PGA*) Pulau Jawa dan Sekitarnya

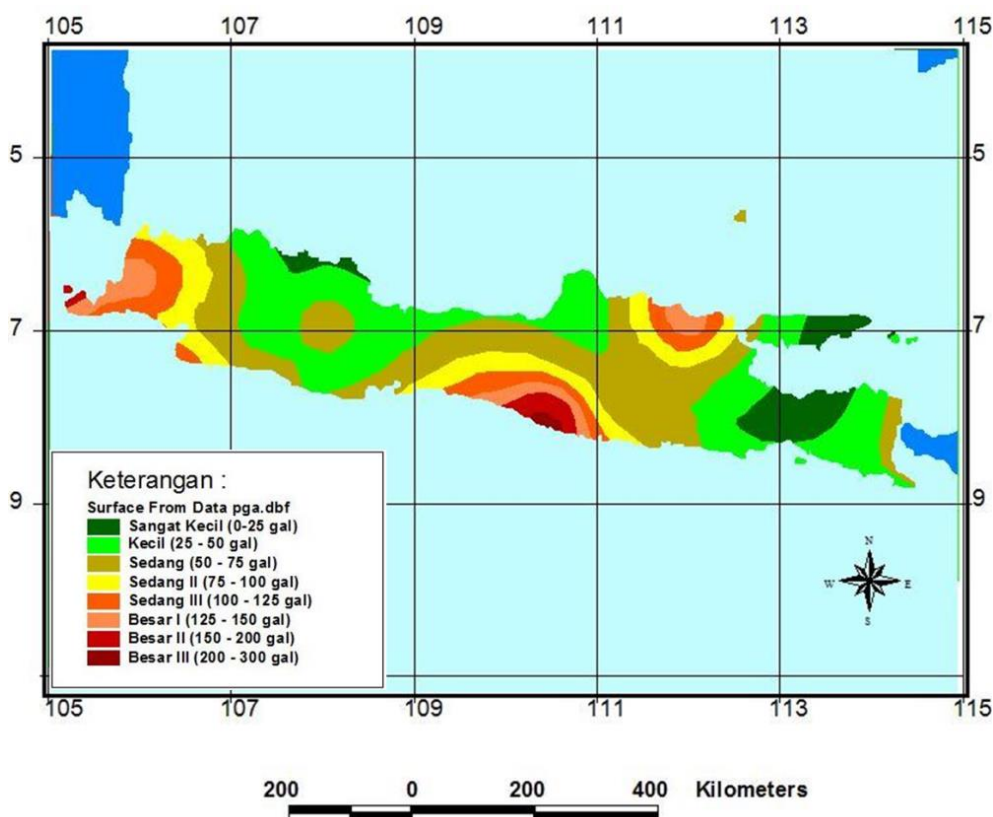
Berdasarkan **Gambar 3**, nilai PGA tertinggi di Pulau Jawa adalah 243,699 *gal* yang terjadi di Propinsi Daerah Istimewa Yogyakarta (DIY), dengan posisi titik koordinat 8°LS dan 110,5°BT. Tingginya nilai PGA di titik lokasi tersebut diperkirakan akibat getaran dari berbagai gempa tektonik besar. Salah satunya adalah gempabumi yang terjadi tanggal 27 Mei 2006 dengan posisi episenter 7,96°LS dan 110,46°BT serta kedalaman 10 km dan kekuatan 6,3 Skala Richter (SR). Kejadian gempabumi tektonik di wilayah Yogyakarta dan sekitarnya sering terkait dengan aktivitas Sesar Kali Opak seperti ditunjukkan dengan garis warna merah pada **Gambar 3**. Sesar ini menjadi jalur pelepasan energi deformasi akibat aktivitas tumbukan Lempeng Samudera Indo-Australia terhadap Lempeng Benua Eurasia atau aktivitas blok batuan di dalam sesar. Selain di Yogyakarta, nilai PGA tertinggi juga dijumpai di wilayah batas pantai barat Pulau Jawa akibat aktivitas tumbukan Lempeng Indo-Australia terhadap Lempeng Eurasia. Wilayah lain yang memiliki nilai PGA relatif tinggi adalah Sumedang Jawa Barat yang diduga terkait dengan aktivitas Sesar Cimandiri sebagai jalur pelepasan energi deformasi, seperti ditunjukkan dengan garis biru pada **Gambar 3**.

Berdasarkan **Gambar 3** di atas, sebaran nilai PGA untuk kawasan Eks-Karesidenan Banyumas dan sekitarnya hanya berkisar 60-an hingga 120-an *gal*. Hal ini dapat dipahami karena jumlah gempa tektonik yang lokasi episenternya di kawasan tersebut sangat sedikit. Getaran yang dirasakan adalah hasil perambatan gelombang gempa dari lokasi lain, misalnya bersumber dari gempabumi tektonik di selatan dan barat daya Pesisir Cilacap. Kecenderungan umum nilai PGA di kawasan Eks-Karesidenan Banyumas adalah semakin ke arah tenggara, maka nilai PGA-nya semakin besar. Kondisi ini diperkirakan akibat efek perambatan getaran gempabumi dari kawasan Yogyakarta dan sekitarnya.

Nilai PGA bisa digunakan sebagai dasar untuk menentukan tingkat resiko gempabumi tektonik suatu kawasan. Berdasarkan sebaran nilai PGA, maka tingkat resiko gempabumi tektonik bisa

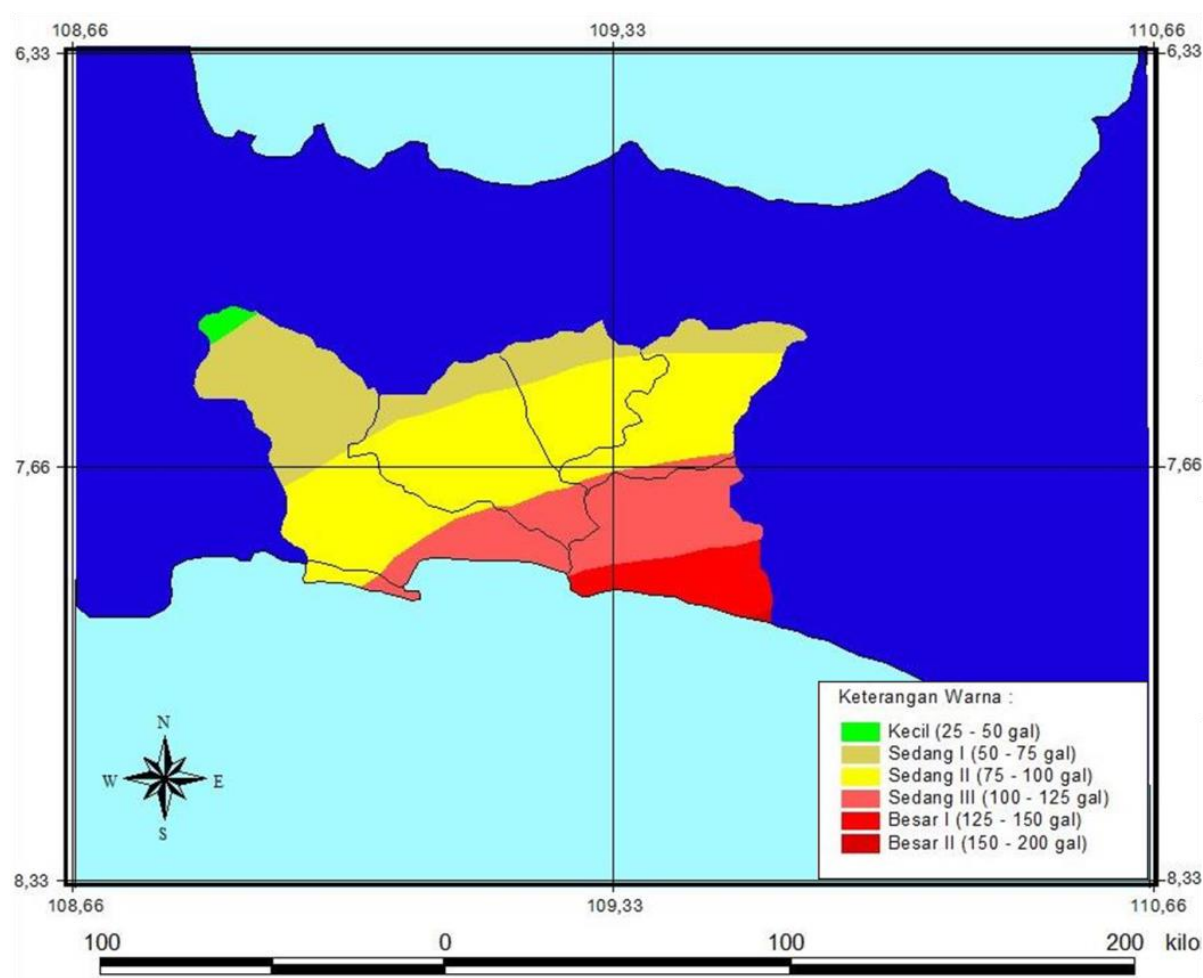
diklasifikasikan menjadi 10 tingkat, berkisar dari resiko sangat kecil ($< 25 \text{ gal}$) hingga resiko sangat besar II ($> 600 \text{ gal}$) (Fauzi, 2001). Untuk Pulau Jawa, tingkat resiko gempabumi tektonik paling tinggi adalah resiko besar III ($200 - 300 \text{ gal}$) yang terjadi di Yogyakarta bagian selatan dan pantai barat Banten seperti dapat dilihat pada **Gambar 4**. Adapun kawasan Eks-Karesidenan Banyumas yang meliputi Kabupaten Cilacap, Kabupaten Banyumas, Kabupaten Purbalingga, dan Kabupaten Banjarnegara, serta Kabupaten Kebumen sebagai tambahan, sebagian besar memiliki tingkat resiko gempabumi tektonik sedang. Kondisi ini dapat dipahami karena di kawasan ini tidak ditemui episenter gempabumi tektonik dan tidak terdapat gempabumi berskala besar khususnya di selatan pantai Cilacap.

Berdasarkan **Gambar 4**, tingkat resiko gempabumi tektonik rata-rata untuk kawasan Eks-Karesidenan Banyumas adalah sedang. Adapun secara keseluruhan, daerah penelitian ini memiliki lima tingkatan resiko gempabumi tektonik, yang terdiri atas resiko kecil ($25 - 50 \text{ gal}$), resiko sedang I ($50 - 75 \text{ gal}$), resiko sedang II ($75 - 100 \text{ gal}$), resiko sedang III ($100 - 125 \text{ gal}$) dan resiko besar I ($125 - 150 \text{ gal}$). Resiko terkecil terdapat di wilayah utara Kabupaten Cilacap yang berbatasan dengan Kabupaten Brebes. Adapun resiko besar I terdapat di Kabupaten Kebumen bagian timur hingga selatan. Besarnya resiko gempabumi di wilayah tersebut diperkirakan akibat kawasan ini relatif dekat dengan sumber-sumber gempabumi tektonik di sekitar Yogyakarta. Pembagian tingkat resiko gempabumi tektonik di kawasan Eks-Karesidenan Banyumas yang didasarkan atas sebaran nilai PGA ini dapat dilihat pada **Gambar 5**.



Gambar 4. Peta Tingkat Resiko Gempabumi Tektonik Pulau Jawa Berdasarkan Data Seismisitas Gempabumi Tektonik Tahun 1903 – 2006.

Sebagian besar getaran gempa yang terasa di wilayah Eks-Karesidenan Banyumas berasal dari gempabumi tektonik yang jarak episenternya relatif jauh. Sebagian besar episenter gempabumi berada di Samudera Indonesia, sebagian di Jawa Barat, serta sebagian kecil di Jawa Timur dan Laut Jawa. Sedikitnya jumlah gempabumi tektonik yang lokasi episenternya di Jawa Tengah diperkirakan akibat tidak terdapat aktivitas sesar atau patahan yang signifikan untuk memicu kejadian gempabumi. Komplek patahan besar Kebumen – Muria – Meratus, serta Cilacap – Pamanukan – Lematang yang membelah Jawa Tengah diperkirakan sudah tidak terlalu aktif (Huda dan Ngaziz, 2012). Sedangkan Sesar yang masih aktif hanyalah Sesar Opak yang melalui wilayah Yogyakarta hingga Klaten yang merupakan lokasi episenter gempabumi tektonik pada tanggal 27 Mei 2006. Hal ini berbeda dengan wilayah Jawa Barat yang memiliki titik episenter gempabumi tektonik relatif banyak. Kondisi ini akibat aktivitas sesar geser di dalam zona patahan Jawa Barat, seperti Sesar Lembang, Sesar Cimandiri, dan Sesar Baribis (Nainggolan, 2009). Ketiga sesar tersebut telah diperkenalkan oleh Van Bammelen (1970) dan diperkirakan seluruhnya masih aktif.



Gambar 5. Peta Tingkat Resiko Gempabumi Tektonik Eks-Karesidenan Banyumas (dan Kabupaten Kebumen) Berdasarkan Data Seismisitas Gempabumi Tektonik Masa Lalu (Tahun 1903 – 2006)

4. Kesimpulan

Berdasarkan data percepatan tanah maksimum (*Peak Ground Acceleration*) hasil pengolahan data gempabumi tektonik masa lalu (1903 – 2006) menggunakan formulasi Fukushima – Tanaka (1990), wilayah Eks-Karesidenan Banyumas (*plus* Kabupaten Kebumen) terbagi atas empat tingkat resiko bencana gempa tektonik. Empat tingkat resiko tersebut meliputi: resiko kecil (25 – 50 *gal*), resiko sedang I (50 – 75 *gal*), resiko sedang II (75 – 100 *gal*), dan resiko sedang III (100 – 125 *gal*). Sedangkan khusus Kabupaten Kebumen, terdapat bagian kecil kawasan pada bagian timur hingga selatan yang memiliki tingkat resiko besar I (125 – 150 *gal*). Kecenderungan pola perubahan tingkat resiko bencana gempa tektonik di kawasan Eks-Karesidenan Banyumas adalah semakin ke tenggara semakin besar.

Ucapan Terima Kasih

Terima kasih secara tulus disampaikan kepada Rektor Universitas Jenderal Soedirman dan Ketua Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat (LPPM) UNSOED atas biaya yang disediakan untuk penelitian. Terima kasih disampaikan sebesar-besarnya kepada pimpinan dan staf Badan Meteorologi, Klimatologi, dan Geofisika (BMKG) – Stasiun Geofisika Banjarnegara atas data yang disediakan. Terimakasih juga disampaikan kepada Saudara Wahid Nurrahman, S.Si. (alumni Program Studi Fisika UNSOED angkatan tahun 2005) yang telah ikut bersusah payah membantu pembuatan peta menggunakan perangkat lunak Arc-View 3.3.

Daftar Pustaka

- Anonim, 2007. *Peta Zona Gempa Indonesia Sebagai Acuan Dasar Perencanaan dan Perancangan Bangunan*. Puslitbang Sumberdaya Air. Badan Penelitian dan Pengembangan. Departemen Pekerjaan Umum. Jakarta.
- Bemmelen, RW. Van., 1970. *The Geology of Indonesia*, Vol. IA, Martinus Nijhoff The Hague, The Netherlands.
- Fauzi. (2001). Aplikasi Peta Bencana Alam di Indonesia. *Peluncuran Peta Gempabumi dan Seminar Sehari: Earthquake, Aprobable Event 2001*.
- Fukushima Y. and T. Tanaka. (1990). A New Attenuation Relation for Peak Horizontal Acceleration of Strong Motion in Japan. *Seismological Society of America Bulletin* 80 (4): 757-783
- Giancolli, and Douglas, S. (1991). *Physics: Principle with Applications*. 3th. Prentice-Hall International Edition. USA.
- Huda, E. (2011). Cilacap Digoyang Gempa 5,3 Skala Richter, Gempa Tak Berpotensi Menimbulkan Gelombang Tsunami. *Berita*. Vivanews.com. Edisi Jumat 1 Juli 2011.
- Huda, E. dan Ngaziz, A.N. (2012). 12 Sumber Gempabumi Kepung Jakarta: Sumber Gempa yang Mengepung Ibukota itu Berupa Sesar dan Subduksi di Darat Maupun di Laut. *Artikel Sains dan Teknologi*. Vivanews.com. Edisi Selasa 17 April 2012.
- Kirbani S.B., Prasetya, T. dan Widigdo, F.M. (2006). Percepatan Getaran Tanah Maksimum Daerah Istimewa Yogyakarta 1943 – 2006. *Jurnal Geofisika* 2006/1.
- Nainggolan, H. (2009). Mengapa Jawa Barat Terjadi Gempabumi. *Artikel*. Sumber: Totalcorner.blogspot.com

- Najoan, Th.F. (2004). Frekuensi Kejadian Gempa di Indonesia sebagai Acuan untuk Analisis Resiko Gempa. *Seminar Nasional Hari Air Sedunia*. Maret 2004. Jakarta.
- Natawidjaya D.H. (1995). *Evaluasi Bahaya Patahan Aktif, Tsunami, dan Guncangan Gempa*. Laboratorium Riset Bencana Alam Geoteknologi. LIPI. Jakarta.
- Rovicky. (2006). Empat Patahan dalam Gempa Yogya. *Blog*. WordPress.com.
- Supriatna, J.M., Semedi, and Nurmala, C. (2010). Peak Ground Acceleration (PGA) of Destructive Earthquake in Cimandiri Fault, Sukabumi West Java. *International Symposium and Exhibition*. 26 – 28 July 2010. Kualalumpur.
- Syurkani, P. (2011). Pasca Gempa, Sebagian Warga Cilacap Sudah Kembali ke Rumah. *Tempo Interaktif*. Edisi Senin, 04 April 2011.
- Wirasatria. (2011). Gempa 6,3 SR Guncang Cilacap. *Berita Nasional*. Inilah.com. Edisi Selasa, 26 April 2011.

KENORMALAN ASIMTOTIK STATISTIK GETIS LOKAL TERMODIFIKASI

Jajang

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman
Email: rzjajangstk@gmail.com

Abstrak. Artikel ini membahas konstruksi matriks pembobot dengan *A Multidirectional Optimum Ecotope-Based Algorithm (AMOEBA)*. Prosedur AMOEBA yang diperkenalkan oleh Aldstadt dan Getis dengan menggunakan statistik Getis lokal yang diklaim berdistribusi normal. Namun demikian, hasil evaluasi terhadap statistik Getis lokal menunjukkan bahwa pengaruh distribusi variabel perlu dipertimbangkan, tentunya selain proporsi unit-unit yang bertetangga. Dalam kasus yang dicoba adalah ketika variabel yang menjadi perhatian katakanlah variabel X_i , $i=1,2,\dots,n$ berdistribusi *iid Gamma* (1,4), kenormalan statistik Getis lokal tidak valid. Karena dalam prosedur AMOEBA didasarkan pada distribusi normal maka dilakukan modifikasi terhadap variabel asal transformasi $(x_i) \rightarrow (\hat{F}_n(x_i))$. Hasil penelitian menunjukkan bahwa statistik Getis lokal modifikasi berdistribusi normal asimtotik.

Kata kunci: matriks pembobot spasial, AMOEBA, Statistik getis local.

1. Pendahuluan

Getis dan Ord (1992) memperkenalkan statistik Getis lokal (G_i) untuk mempelajari pola lokal dalam data spasial. Statistik ini mengukur derajat hubungan yang dihasilkan dari pusat titik-titik terboboti dan semua titik lain yang berjarak d dari titik asal (pivot). Dalam hal ini apabila ditetapkan nilai variabel di titik asal (X_i), $i=1,2,\dots,n$, maka terdapat $(n-1)!$ kemungkinan nilai-nilai x_j selainnya yang bertetangga. Di bawah hipotesis nol bahwa tidak terdapat hubungan spasial, permutasi acak di sini saling lepas dan serbasama dan oleh karenanya distribusi permutasi G_i mendekati normal (Getis dan Ord, 1992). Salah satu penerapan statistik lokal Getis dalam pemodelan adalah untuk membentuk matriks pembobot spasial yang disebut *A Multidirectional Optimum Ecotope-Based Algorithm (AMOEBA)* oleh Aldstaadt dan Getis (2006), dan berikutnya algoritmanya dioptimalkan oleh Duque *et al.* (2011).

Asumsi kenormalan asimtotik statistik Getis lokal telah banyak digunakan dan untuk menentukan nilai- p (p -value), Getis dan Ord (1992) menyarankan membandingkannya dengan nilai- p uji- z . Dalam merancang matriks pembobot spasial, Aldstadt dan Getis (2006) menggunakan kenormalan asimtotik dari statistik G_i dalam algoritma AMOEBA.

Kenormalan asimtotik statistik G_i yang telah diklaim oleh Getis dan Ord perlu dikonfirmasi kembali dikarenakan Zhang (2008) telah memperlihatkan bahwa distribusi statistik G_i bergantung pada distribusi variabel asal X_i , $i=1,2,\dots,n$. Kajian ini bertujuan untuk mengkonfirmasi distribusi statistik G_i dan memberikan sebuah alternatif penyelesaian ketika G_i tidak selalu berdistribusi normal.

2. Metodologi Penelitian

Autokorelasi spasial berkaitan dengan pola tak acak dari nilai-nilai atribut atas himpunan unit-unit spasial. Autokorelasi spasial dapat dianalisis dari dua perspektif yang berbeda. Dalam mengukur autokorelasi spasial, terdapat dua jenis ukuran yaitu ukuran global dan ukuran lokal. Analisis autokorelasi global meliputi kajian keseluruhan pola peta dan secara umum menjawab sebuah

pertanyaan apakah terdapat pola yang menggerombol atau tidak. Ukuran autokorelasi spasial lokal digunakan untuk mendeteksi adanya sinyal kantung yang signifikan dalam gerombol (*cluster*) (Ord dan Getis, 1995). Autokorelasi statistik lokal mampu mendeteksi *hot spot* (*local spatial cluster*) (Nelson dan Boots, 2008). Menurut Anselin (1995) hot spot merupakan *local spatial cluster* teridentifikasi sebagai lokasi atau himpunan lokasi yang bersebelahan dimana *Local Indicator Spatial Association* signifikan. Salah satu statistik untuk mengukur autokorelasi lokal yang sering digunakan adalah statistik Getis lokal.

Statistik Getis lokal diperkenalkan oleh Getis dan Ord (1992) untuk mempelajari pola lokal dalam data spasial, mendeteksi kantung-kantung spasial yang tidak dapat terdeteksi oleh statistik global. Statistik Getis lokal, G_i , yang berjarak tidak lebih dari d diekspresikan dengan $G_i(d)$ dan didefinisikan sebagai:

$$G_i(d) = \frac{\sum_j w_{ij}(d)x_j}{\sum_j x_j}, \quad j \neq i \quad (1)$$

dengan $w_{ij}(d)$ adalah matriks pembobot spasial simetrik yang bernilai 1 jika unit spasial j berada dalam jarak d dari unit spasial i , selainnya 0. Variabel acak x_i adalah nilai amatan yang menjadi perhatian untuk unit spasial i . Untuk penyederhanaan, ambil $G_i = G_i(d)$, $w_{ij} = w_{ij}(d)$ dan $w_i = \sum_{j \neq i} w_{ij}$ (jumlah unit-unit yang bertetangga dengan unit i) (1). Untuk penyederhanaan, ambil $w_i = \sum_{j \neq i} w_{ij}(d)$, $w_{ij} = w_{ij}(d)$ dan $G_i = G_i(d)$. Nilai harapan dan ragam statistik G_i di bawah hipotesis null

$$E(G_i) = \frac{w_i}{n-1} \quad (2)$$

$$Var(G_i) = \frac{w_i(n-1-w_i)}{(n-1)^2(n-2)} \cdot \left[\frac{s(i)}{\bar{x}(i)} \right]^2, \quad (3)$$

dengan $\bar{x}(i) = \frac{\sum_j x_j}{n-1}$, $s^2(i) = \frac{\sum_j x_j^2}{n-1} - (\bar{x}(i))^2$.

Berdasarkan (2) dan (3), terdapat kasus ekstrim, yakni untuk $w_i = 0$ artinya bahwa unit i tidak mempunyai tetangga maka $E(G_i) = 0$ dan $Var(G_i) = 0$. Pada kasus $w_i = n-1$ artinya semua unit spasial j , ($j=1,2,\dots,n$, $j \neq i$) bertetangga dengan i ($w_i = n-1$) maka $E(G_i) = \frac{n-1}{n-1} = 1$ dan $Var(G_i) = 0$. Statistik Getis lokal yang terbakukan adalah

$$G_i^* = \frac{G_i - E(G_i)}{\sqrt{Var(G_i)}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

dengan $E(G_i)$ dan $Var(G_i)$ adalah rata-rata dan ragam sebagaimana dinyatakan pada (2) dan (3).

Teorema limit pusat merupakan salah satu teorema yang cukup banyak digunakan untuk menguji kenormalan distribusi variabel acak, terutama untuk variabel acak yang saling bebas dan identik. Teorema ini didasarkan pada ukuran contoh (*sample size*) yang besar ($n \rightarrow \infty$), dan terkait dengan dasar-dasar kekonvergenan. Umumnya dalam teorema ini didasarkan pada kekonvergenan dalam peluang, yang didefinisikan sebagai berikut; misalkan $\{X, X_n, n \geq 0\}$ adalah variabel acak pada ruang $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, maka barisan $(X_n, n \geq 0)$:

$$X_n \xrightarrow{P} X \text{ (konvergen dalam peluang) jika } \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \leq \epsilon) = 1 \quad \forall \epsilon > 0.$$

Dalam aplikasinya, kebebasan dan keidentikan distribusi variabel acak perlu diperhatikan. Dalam CLT klasik diasumsikan bahwa distribusi variabel acak yang saling bebas dan identik, atau biasanya disingkat iid (*independent identically distribution*). Misalkan $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ adalah contoh acak berukuran n , yakni barisan variabel acak iid, dengan $E[X_i] = \mu$ dan $\text{Var}[X_i] = \sigma^2 < \infty$, dan $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i / n$. Jika n menuju tak hingga, maka

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1). \quad (5)$$

Ketika kondisi keidentikan distribusi tidak terpenuhi dimana variabel acak mempunyai nilai tengah dan ragam yang tidak identik, dapat digunakan teorema limit pusat *Lyapunov (Lyapunov CLT)*. Anggaplah $\{X_i\}$ adalah barisan variabel acak saling bebas yang masing-masing mempunyai nilai harapan μ_i dan ragam σ_i^2 . Didefinisikan $s_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$. Untuk sembarang $\delta > 0$, kondisi Lyapunov $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^n E[|X_i - \mu_i|^{2+\delta}] = 0$ terpenuhi, untuk $n \rightarrow \infty$, maka

$$\frac{1}{s_n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) \xrightarrow{d} N(0,1). \quad (6)$$

Chung (2001) mengambil kasus husus dimana $\mu_i = 0$ dan $s_n = 1$ dan $\delta=1$. Misalkan untuk setiap $n \geq 1$ terdapat k_n variabel acak $\{X_{nj}, 1 \leq j \leq k_n\}$, dimana $k_n \rightarrow \infty$ apabila $n \rightarrow \infty$, ambil $S_n = \sum_{j=1}^{k_n} X_{nj}$ dan asumsikan bahwa antar X_{nj} dan $X_{nj'}, j \neq j', 1 \leq j \leq k_n$, saling bebas dan antar baris ($n=1,2,\dots$) tidak saling bebas. Misalkan $E(X_{nj}) = \alpha_{nj}$, $\text{Var}(X_{nj}) = \sigma_{nj}^2$, $E(S_n) = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{nj} = \alpha_n$, $\text{Var}(S_n) = \sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{nj}^2 = s_n^2$, dan $\Gamma_n = \sum_{j=1}^{k_n} |X_{nj}|^3$. Sehingga jika $\sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{nj}^2 = 1$, $\forall n, \forall j, \alpha_{nj} = 0$, $E(|X_{nj}|^3) < \infty$, dan $\Gamma_n \rightarrow 0$ maka untuk $n \rightarrow \infty$ maka, $S_n \xrightarrow{d} N(0,1)$.

Teorema Limit Pusat *Lindenbergl (Lindenbergl CLT)* mempunyai karakteritik variabel acak yang sama dengan Lyapunov, yakni variabel acak tidak berdistribusi identik. Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, kondisi Lindenbergl $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{i=1}^n E(X_i - \mu_i)^2 I_{\{|X_i - \mu_i| > \varepsilon s_n\}} = 0$ terpenuhi, dengan $I_{(\cdot)}$ adalah fungsi statistic, untuk $n \rightarrow \infty$, maka

$$\frac{1}{s_n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) \xrightarrow{d} N(0,1). \quad (7)$$

Data yang digunakan untuk mendukung dalam kajian ini merupakan data simulasi melalui pembangkitan data melalui metode permutasi acak. Metode yang digunakan untuk menganalisa distribusi 35statistic Getis local $G_i, i = 1, 2, \dots, n$ pada (3.1), dilakukan tahapan sebagai berikut:

Estimatoran distribusi empiris 35statistic Getis local, G_i^* , menggunakan metode permutasi acak distribusi X_i untuk mengkonfirmasi klaim Getis dan Ord maupun Zhang (2008). Dalam metode empiris tersebut, pengujian kenormalan distribusi G_i^* , dilakukan tahapan sebagai berikut :

1. Bangkitkan w_{ij} secara acak, dimana $p_i = w_i/(n-1)$
2. Bangkitkan variabel acak X_j yang mengikuti distribusi *Gamma* (1,4) berukuran $N = 200$, dengan p_i berada pada interval 0.01 sampai 0.9.

3. Lakukan permutasi acak sebanyak 5000 kali terhadap X_i untuk menentukan G_i^* pada setiap p_i serta jenis distribusi variabel acak X_i .
4. Buat kurva normal G_i^* yang dihasilkan dari tahap (3).

3. Pembahasan

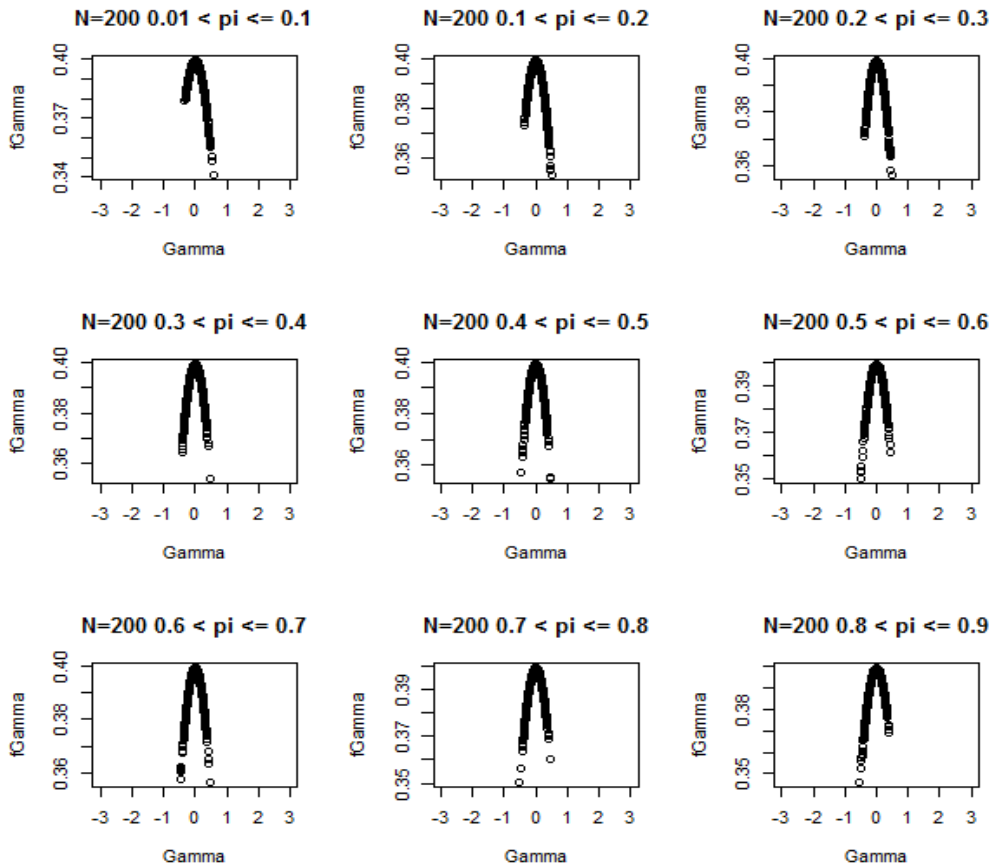
Tahapan analisis yang digunakan adalah mengkonfirmasi distribusi empiris dari statistik Getis lokal yang terstandarisasi melalui kurva normal pada variasi proporsi jumlah tetangga, p_i . Untuk mengecek kenormalan distribusi statistik Getis lokal, digunakan variabel asal (X_i) yang berdistribusi *Gamma* (1,4) untuk memuat klaim Zhang (2008) yang mengatakan bahwa apabila X_i berdistribusi *Gamma* maka kenormalan G_i tidak valid. Terakhir akan dimodifikasi statistik G_i sebagai solusi alternatif ketika G_i tidak selalu berdistribusi normal.

Distribusi statistik G_i menggunakan permutasi acak dari variabel unit-unit X_i , $i=1,...,n$, didasarkan pada permutasi unit-unit yang bertetangga dengan unit tertentu, katakanlah unit i . Mengacu pada definisi statistik lokal Getis (1), permutasi pada penyebut bersifat tetap (konstan), sehingga distribusi statistik Getis lokal permutasi acak dari unit-unit j yang bertetangga dengan unit i , yang dalam hal ini bergantung pada fungsi indikator w_{ij} yang bernilai 0 atau 1, $w_{ij} \in \{0,1\}$, $j=1,2,...,n-1$:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika unit } j \text{ bertetangga dengan unit } i \\ 0, & \text{jika unit } j \text{ tidak bertetangga dengan unit } i, \text{ atau } j = i \end{cases} \quad (8)$$

Susunan permutasi acak dari unit-unit yang bertetangga dapat dianggap sebagai pengambilan objek tanpa pengembalian (*without replacement*) sehingga setiap unit spasial mempunyai peluang yang bergantung pada pengambilan sebelumnya. Proses ini cenderung mendekati distribusi hipergeometrik, dimana distribusi tersebut dapat diaproksimasi oleh normal (Nicholson (1956), Roussas (1972), Lahiri *et al.* (2007)). Anggaplah bahwa pusat perhatian terarah pada jumlah unit yang bertetangga dan unit yang bukan tetangga. Jika dari $n-1$ unit yang ada terdapat jumlah unit yang bertetangga dengan i sebanyak w_i , maka peluang jumlah unit yang bertetangga adalah $P(W_{ij} = 1) = \frac{w_i}{n-1}$. Nilai harapan dan ragam statistik lokal Getis, G_i , disajikan pada Lampiran.

Ambil G_i^* sebagai statistik Getis lokal yang didefinisikan pada (4). Konsentrasi pertama yang dilakukan adalah mengkonfirmasi kembali distribusi empiris statistik G_i^* untuk variabel asal X_i , $i=1,2,...,N$ yang berdistribusi *Gamma*(1,4), $N=200$ menggunakan 5000 permutasi. Pada Gambar 1 disajikan kurva statistik G_i^* dibawah hipotesis null, menggunakan 5000 permutasi untuk $N=200$ ketika variabel acak X_i berdistribusi *iid Gamma* (1,4).



Gambar 1. Kurva G_i^* untuk $N=200$ pada variasi p_i menggunakan 5000 permutasi acak.

Kurva normal statistik G_i^* hasil prosedur permutasi disajikan pada Gambar 1. Dalam karakteristik kurva normal, salah satu di antaranya bahwa bentuk kurva yang menyerupai lonceng dan simetris (*symmetrical bell-shaped*), dapat dilihat bahwa kenormalan statistik G_i^* tidak valid

Kenormalan statistik Getis lokal perlu dimodifikasi. Misalkan $\mathbf{X}_j$ adalah variabel acak yang menggambarkan nilai-nilai di titik j , dan w_{ij} adalah sebuah fungsi indikator yang didefinisikan pada (8). Dalam hal ini apabila setiap objek mempunyai sifat *equally likely*, maka distribusi hipergeometrik sebagaimana dipaparkan di atas dapat diaproksimasi dengan distribusi normal. Namun demikian, asumsi *equally likely* tidak dapat terpenuhi karena setiap nilai variabel $\mathbf{X}_i$ mempunyai distribusi yang berbeda. Dalam indikasi empiris Gambar 1 memperlihatkan bahwa kurva statistik G_i^* cenderung *skew* ketika variabel asal $\mathbf{X}_i$ berdistribusi $\text{Gamma}(1,4)$. Mengacu pada Gambar 1 dan pendapat Zhang (2008), dilakukan modifikasi statistik G_i menggunakan transformasi terhadap variabel $\mathbf{X}_i$.

Ambil X_i sebagai variabel acak asal dan transformasi, $(x_i) \rightarrow (\hat{F}_n(x_i))$, $i=1,2,\dots,n$,

$$\hat{F}_n(x_i) = \frac{1}{n} \sum_k 1_{X_k \leq x_i}. \quad (9)$$

Nilai tengah dan ragam $\hat{F}_n(x_i)$ berturut-turut adalah :

$$E[\hat{F}_n(x_i)] = \frac{1}{n} \sum_k 1 P(X_k \leq x_i) = F(x_i) \text{ dan } \text{Var}[\hat{F}_n(x_i)] = \frac{1}{n} [F(x_i)][1 - F(x_i)].$$

Mengacu pada teorema Chebyshev

$$P(|\hat{F}_n(x_i) - F(x_i)| > \sqrt{\varepsilon}) \leq \frac{E(|\hat{F}_n(x_i) - F(x_i)|^2)}{\varepsilon} = \frac{[F(x_i)][1 - F(x_i)]}{n\varepsilon}.$$

Dengan demikian untuk $n \rightarrow \infty$, $\hat{F}_n(x) \xrightarrow{p} F(x)$, karena $\hat{F}_n(x)$ konvergen dalam peluang menuju $F(x)$ maka $\hat{F}_n(x)$ konvergen dalam distribusi menuju $F(x)$, atau dinyatakan dengan $\hat{F}_n(x) \xrightarrow{d} F(x)$ (Roussas, 1997; Shao, 2003).

Modifikasi statistik G_i dengan mentransformasi x_j ke $\hat{F}_n(x_i)$ diperoleh statistik Getis lokal termodifikasi, katakanlah $G_{new(i)}$, yang dinyatakan sebagai :

$$G_{new(i)} = \frac{\sum_j w_{ij} \hat{F}_n(x_j)}{\sum_j \hat{F}_n(x_j)}, \quad j \neq i. \quad (10)$$

Ambil $G_{new(i)}$ sebagaimana pada (3.10) dan untuk menyederhanakan, misalkan $V_i = \hat{F}_n(x_i)$, $i=1,2,\dots,n$, sehingga $G_{new(i)}$ terbakukan, $G_{new(i)}^*$, dinyatakan

$$G_{new(i)}^* = \frac{G_{new(i)} - E(G_{new(i)})}{\sqrt{Var(G_{new(i)})}}, \quad (11)$$

dengan $E[G_{new(i)}^*] = \frac{w_i}{n-1}$ dan $Var[G_{new(i)}^*] = \frac{w_i(n-1-w_i)}{(n-1)^2(n-2)} \left[\frac{S_v}{\bar{v}} \right]^2$, S_v dan $\bar{v}$ berturut-turut adalah simpangan baku dan nilai tengah variabel acak V .

Ambil $\sigma_{j(i)}^2 = Var(V_j) = \frac{F(x_j)(1-F(x_j))}{n-1}$ dan $\mu_{j(i)} = E(V_j) = F(x_j)$, $j \neq i$, $j = 1, 2, \dots, n$. Untuk penyederhanaan, dimisalkan $\sigma_{j(i)}^2 = \sigma_j^2$ dan $\mu_{j(i)} = \mu_j$. Perhatikan bahwa $\sigma_j^2 \approx \sigma^2 = \frac{F(x)(1-F(x))}{n-1}$, yakni untuk n besar, $n \rightarrow \infty$, σ_j^2 dan σ^2 , akan mendekati nol 0. Di bawah kondisi ini, $G_{new(i)}^*$ adalah berdistribusi asimtotik normal standar, $G_{new(i)}^* \rightarrow N(0,1)$.

Untuk membuktikan bahwa $G_{new(i)}^*$ berdistribusi normal standar, digunakan teorema Lyapunov (Billingsley, 1995, Chung, 2001). Anggaplah bahwa untuk setiap n barisan variabel acak $V_1, V_2, \dots, V_n$ saling bebas, dengan nilai tengah dan ragam yang tidak homogen, $E(V_i) = \mu_i$, $Var(V_i) = \sigma_i^2$, dan dimisalkan $R_n = \sum_{i=1}^n V_i$, $S_n^2 = Var(R_n) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$. Untuk sembarang δ positif, jika

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^n E[|V_i - \mu_i|^{2+\delta}] = 0 \quad (12)$$

maka

$$\frac{1}{S_n} \sum_{i=1}^n (V_i - \mu_i) \xrightarrow{d} N(0,1). \quad (13)$$

Ambil $T_n = (n-1)b_1 [G_{new(i)} - E[G_{new(i)}]]$, $b_1 = \bar{V}$ (b_1 adalah *invariant* dibawah permutasi acak V_j), $V_j = \hat{F}_n(x_j)$, $\mu_j = E[V_j] = F(x_j)$, $\tilde{w}_{ij} = w_{ij} - \frac{w_i}{n-1}$, $\gamma =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_j \tilde{w}_{ij}^2}{n-1} \text{ dan } b_1 \rightarrow \mu \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Karena $[G_{new(i)} - E[G_{new(i)}]] = \frac{1}{(n-1)b_1} [\sum_j \tilde{w}_{ij} V_j]$, T_n dapat dituliskan kembali sebagai

$$T_n = \sum_j \tilde{w}_{ij}(V_j - \mu_j) + \sum_j \tilde{w}_{ij}\mu_j. \quad (14)$$

Teorema. Anggaplah bahwa $V_j = \hat{F}_n(x_j)$, $\mu_j = E(V_j)$, $b_1 = \bar{V}$ dan T_n sebagaimana diberikan pada (3.14). Jika $\frac{\sum_j w_{ij}(V_j - b_1)}{(n-1)b_1} \rightarrow 0$, untuk sembarang distribusi $X_j, j=1,2,\dots,n$ maka

$$T_n \rightarrow N\left(0, \gamma F(x)(1 - F(x))\right)$$

untuk $n \rightarrow \infty$.

Bukti. Ambil $T_n = \sum_j \tilde{w}_{ij}(V_j - \mu_j) + \sum_j \tilde{w}_{ij}\mu_j$ (3.14), nilai tengah dan ragam T_n berturut-turut adalah, $E(T_n) = \sum_j \tilde{w}_{ij}\mu_j$ dan $Var(T_n) = E(T_n^2) - [E(T_n)]^2 = \sum_j \tilde{w}_{ij}^2 \sigma_j^2$, dengan $\tilde{w}_{ij} = w_{ij} - \frac{w_{i.}}{n-1}$. Pertama akan dibuktikan bahwa $E(T_n) \rightarrow 0$ untuk $n \rightarrow \infty$.

$$\text{Ambil } = \frac{\sum_j \mu_j}{n-1},$$

$$\frac{w_{i.}}{n-1} = \frac{\sum_j w_{ij}V_j}{\sum_j V_j} - \frac{\sum_j w_{ij}(V_j - b_1)}{\sum_j V_j}$$

atau dapat ditulis kembali sebagai

$$\frac{1}{\sum_j V_j} \sum_j \tilde{w}_{ij}V_j = \frac{\sum_j w_{ij}(V_j - b_1)}{(n-1)b_1}.$$

Karena $V_j \rightarrow \mu_j$ dan $b_1 \rightarrow \mu$, $\frac{1}{\sum_j V_j} \sum_j \tilde{w}_{ij}V_j \rightarrow \frac{1}{\sum_j \mu_j} \sum_j \tilde{w}_{ij}\mu_j$, dapat ditunjukkan bahwa $\frac{\sum_j w_{ij}(V_j - b_1)}{(n-1)b_1} \rightarrow 0$ sehingga, $E(T_n) = \sum_j \tilde{w}_{ij}\mu_j \rightarrow 0$, untuk $n \rightarrow \infty$. Berikutnya akan dibuktikan bahwa $Var(T_n) \rightarrow F(x)(1 - F(x))\gamma$. Perhatikan bahwa $\sigma_j^2 \rightarrow 0, j=1,2,\dots,n$ ($i \neq j$) untuk $n \rightarrow \infty$, sehingga

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} Var(T_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_j \frac{\tilde{w}_{ij}^2}{n-1} F(x_j) (1 - F(x_j)) \right] \\ &= \gamma F(x)(1 - F(x)). \end{aligned}$$

Terakhir, akan ditunjukkan kenormalan asimtotik T_n menggunakan teorema Lyapunov (12).

Ambil $U_j = \tilde{w}_{ij}V_j$, $E(U_j) = \tilde{w}_{ij}\mu_j$, $T_n = \sum_j U_j$ dan $S_n^2 = Var(T_n)$, mengacu pada (12), diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_n^{2+\delta}} \sum_j^n E \left[|U_j - E(U_j)|^{2+\delta} \right]. \quad (15)$$

Dengan mengambil $\delta = 2$, dan memisalkan $Z_j = V_j - \mu_j$, maka pembilang pada (15) dapat dinyatakan sebagai

$$\sum_j E[U_j - E(U_j)]^4 = \sum_j E[\tilde{w}_{ij}Z_j]^4. \quad (16)$$

Karena $0 < \mu_j \leq 1$ dan $E(V_j) \rightarrow \mu_j$, diperoleh $|Z_j| = |V_j - \mu_j| \leq |V_j|$, sehingga sisi ruas kanan (3.16) menjadi

$$\sum_j E[\tilde{w}_{ij}Z_j]^4 \leq \sum_j |\tilde{w}_{ij}|^4 E|V_j|^4. \quad (17)$$

Karena $V_j \in (0,1]$, $E|V_j|^4 = E(V_j)^4 = \frac{1}{n^3} E \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_{x_k \leq x_j} \right] = \frac{F(x_j)}{n^3}$, dengan substitusi $E|V_j|^4 = \frac{F(x_j)}{n^3}$ ke persamaan (17) menghasilkan

$$\sum_{j=1} E|\tilde{w}_{ij}Z_j|^4 \leq \sum_j |\tilde{w}_{ij}|^4 E|V_j|^4 = \frac{1}{n^2} K,$$

dengan $K = \sum_{j=1} \frac{|\tilde{w}_{ij}|^4}{n} F(x_j) < \infty$, sehingga (15) dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^4} \sum_{j=1}^n E \left[|U_j - E(U_j)|^4 \right] \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n E \left[|U_j - E(U_j)|^4 \right]}{\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^4} \\ &= \frac{1}{[F(x)(1-F(x))\gamma]^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} K = 0. \end{aligned}$$

Karena kondisi Lyapunov, (12) dan (13) dapat terpenuhi, maka

$$T_n \rightarrow N(0, F(x)(1-F(x))\gamma). \quad (18)$$

Akibat 1. Berdasarkan (18), diperoleh akibat berikut

$$(n-1) \left[G_{new(i)} - E[G_{new(i)}] \right] \rightarrow N \left(0, \frac{(1-F(x))}{F(x)} \gamma \right).$$

Bukti. Perhatikan bahwa $T_n = (n-1)b_1 \left[G_{new(i)} - E[G_{new(i)}] \right]$ dan $Var(T_n) \rightarrow F(x)(1-F(x))\gamma$ untuk $n \rightarrow \infty$, yang berimplikasi

$$(n-1) \left[G_{new(i)} - E[G_{new(i)}] \right] = \frac{T_n}{b_1}.$$

Karena $b_1 \rightarrow \mu$ untuk $n \rightarrow \infty$, diperoleh

$$(n-1) \left[G_{new(i)} - E[G_{new(i)}] \right] \rightarrow N \left(0, \frac{(1-F(x))}{F(x)} \gamma \right) \text{ untuk } n \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Akibat 2. Berdasarkan (19) berakibat bahwa:

$$G_{new(i)}^* = \frac{G_{new(i)} - E[G_{new(i)}]}{\sqrt{Var(G_{new(i)})}} \rightarrow N(0,1).$$

Bukti. Mengacu pada Akibat 1, $(n-1) \left[G_{new(i)} - E[G_{new(i)}] \right] \rightarrow N \left(0, \frac{(1-F(x))}{F(x)} \gamma \right)$, maka untuk menunjukkan Akibat 2, cukup diperlihatkan bahwa

$$Var \left((n-1)G_{new(i)} \right) = Var \left((n-1) \left[G_{new(i)} - E[G_{new(i)}] \right] \right) \rightarrow \frac{(1-F(x))}{F(x)} \gamma.$$

Perhatikan bahwa $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_j \tilde{w}_{ij}^2}{n}$, $\tilde{w}_{ij} = w_{ij} - \frac{w_i}{n-1}$, dan $Var(G_{new(i)}) = \frac{w_i(n-1-w_i)}{(n-1)^2(n-2)} \frac{S_v^2}{\bar{v}^2}$.

Penjabaran γ dan $Var(G_{new(i)})$ lebih lanjut dapat ditulis kembali

$$\begin{aligned}
\gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_j \tilde{w}_{ij}^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_j \left(w_{ij}^2 - \frac{2w_{ij}w_i}{n-1} + \left(\frac{w_i}{n-1} \right)^2 \right)}{n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_i(n-1-w_i)}{n(n-1)}, \\
\text{Var}(G_{\text{new}(i)}) &= \frac{w_i(n-1-w_i)}{(n-1)^2(n-2)} \frac{S_v^2}{\bar{v}^2} \\
&= \frac{w_i(n-1-w_i)}{n(n-1)(n-1)} \frac{S_v^2}{\bar{v}^2} \frac{n}{(n-2)}
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\text{Var}((n-1)G_{\text{new}(i)}) &= (n-1)^2 \text{Var}(G_{\text{new}(i)}) \\
&= \frac{w_i(n-1-w_i)}{n} \frac{S_v^2}{\bar{v}^2} \frac{n}{(n-2)} \\
&= \frac{w_i(n-1-w_i)}{n(n-1)} \frac{n S_v^2}{\bar{v}^2} \frac{(n-1)}{(n-2)}.
\end{aligned}$$

Karena $S_v \rightarrow \sigma$, $n\sigma^2 = F(x)(1-F(x))$, $\bar{v} = b_1 \rightarrow \mu$, $\frac{w_i(n-1-w_i)}{n(n-1)} \rightarrow \gamma$, dan $\frac{n}{(n-2)} \rightarrow 1$ untuk $n \rightarrow \infty$, maka

$$\text{Var}((n-1)G_{\text{new}(i)}) \rightarrow \frac{(1-F(x))}{F(x)} \gamma,$$

sehingga akan berimplikasi

$$G_{\text{new}(i)}^* = \frac{[G_{\text{new}(i)} - E[G_{\text{new}(i)}]]}{\sqrt{\text{Var}(G_{\text{new}(i)})}} \rightarrow N(0,1) \text{ untuk } n \rightarrow \infty.$$

4. Penutup

Distribusi empiris statistik Getis lokal terstandardisasi, selain dipengaruhi oleh distribusi variabel asal, dipengaruhi pula oleh proporsi unit-unit spasial yang bertetangga, p_i , dimana ketika $p_i \rightarrow 0$ atau $p_i \rightarrow 1$. Pada kasus variabel asal X_i yang berdistribusi *Gamma* (1, 4) diperoleh bentuk kurva G_i^* tidak simetris sehingga dapat disimpulkan bahwa pada kasus ini statistik G_i^* tidak berdistribusi normal.

Modifikasi statistik Getis lokal melalui transformasi variabel asal melalui transformasi, X_i ke $\hat{F}_n(x_j)$ memberikan hasil statistik Getis lokal yang kekar, yakni statistik Getis lokal tersebut mempunyai distribusi normal untuk sembarang distribusi variabel asal X_i .

Daftar Pustaka

- Aldstadt, J and Getis, A. (2004). Constructing the Spatial Weights Matrix using Local Statistic. *Geographical Analysis*. **36** : 90-104.
- Aldstadt, J and Getis, A. (2006). Using AMOEBA to Create a Spatial Weights Matrix and Identify spatial clusters. *Geographical Analysis*. **8**: 327-343.
- Anselin, L. (1995). Local indicators of spatial association-LISA. *Geographical Analysis*. **27**: 93-115.
- Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure*. Third Edition. New York: John Wiley & Sons.

- Bond, S., Hoeffler, A., and Temple, J. (2001). GMM Estimation of Empirical Growth Models.
- Chung, K.L. (2001). *A Course in Probability Theory*. San Diego.
- Duque, J.C., Aldstadt, J., Velasquez, E., Franco, J.L., and Betancourt, A. (2011). A Computationally Efficient for Delineating Irregularly Shaped Spatial Cluster. *J Geogr Syst.* **13**: 355-372.
- Getis, A. dan Ord, J.K. (1992). The Analysis of Spatial Association by Use of Distance Statistics. *Geographical Analysis.* **24**: 189-206.
- Lahiri, S.N., Chatterjee, A. and Maiti, T. (2007). Normal Approximation to the Hypergeometric Distribution in Nonstandard Cases and Sub-Gaussian Berry-Esseen Theorem. *Journal of Statistical Planning and Inference.* **137**: 3570-3590.
- Nelson, T.A. and Boots, B. (2008). Detecting Spatial Hot Spots in Landscape Ecology. *Journal compilation Ecography.* 1-11
- Nicholson, W.L. (1956). On the Normal Approximation to the Hypergeometric Distribution. *The Annals of Mathematical Statistics.* **27**: 471-483.
- Ord, J.K. and Getis, A. (1995). Local Spatial Autocorrelation Statistics: Distributional Issues and an Application. *Journal Geographical Analysis.* **27**: 286-306
- Roussas, G.G. (1997). *A Course in Mathematical Statistics*. Second Edition. San Diego: Academic Press.
- Shao, J. (2003). *Mathematical Statistics*. Second Edition. New York: Springer.
- Zhang, T. (2008). Limiting Distribution of the G statistics. *Elsevier.* **78**: 1656-1661

ALJABAR GEOMETRI SELAYANG PANDANG

Idha Sihwaningrum¹⁾ dan Sandi Setiawan²⁾

¹⁾ Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman
Email: idha.sihwaningrum@unsoed.ac.id

²⁾Life Member, Clare Hall, University of Cambridge, United Kingdom.
Email: sandisetiawan@hotmail.com

Abstrak. Aljabar Geometri merupakan aljabar bertingkat yang anggotanya berupa *multivector*. Pada Aljabar Geometri, operasi antar *multivector* bisa dilakukan menggunakan *geometric product*, yang merupakan jumlahan dari *inner* dan *outer product*. Dengan fleksibilitas *geometric product* yang mampu menjangkau ruang Euclid untuk semua dimensi, menjadikan Aljabar Geometri sebagai piranti yang ampuh dalam menyelesaikan berbagai persoalan di bidang sains.

Kata Kunci: *blade, geometric product, graded algebra, inner product, multivector, outer product*

1. Pendahuluan

Aljabar dan Geometri merupakan cabang Matematika yang telah dikenal orang sejak jaman dahulu. Pada Aljabar dipelajari operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian bilangan menggunakan simbol-simbol; sedangkan pada geometri dipelajari bangun-bangun di bidang (yang berdimensi dua) serta bangun-bangun di ruang (berdimensi tiga). Kedua cabang ilmu Matematika tersebut juga saling berkaitan. Aljabar seringkali digunakan untuk menyelesaikan permasalahan di Geometri, dan Geometri juga digunakan untuk mengilustrasikan konsep-konsep di Aljabar (Laurinolli, 2016). Pada tahun 1878, Clifford memperkenalkan sebuah konsep, yaitu sistem operasi pada Aljabar dapat dikonstruksi menggunakan bangun-bangun geometri, sehingga Aljabar yang diperkenalkan oleh Clifford ini sering disebut Aljabar Geometri atau Aljabar Clifford. Aljabar Geometri menjadi salah satu piranti yang penting di berbagai bidang, khususnya bidang Fisika, seperti yang dapat dilihat pada Setiawan (2000) dan Lasenby (2019). Aljabar Geometri dilengkapi dengan *geometric product*, yang merupakan gabungan dari *inner product* (yang dikenal juga dengan hasil kali titik) dan *outer product* (yang merupakan perluasan dari hasil kali silang).

2. Hasil Kali Titik dan Hasil Kali Silang

Sebelum mengenal Aljabar Geometri lebih jauh, terlebih dahulu akan diperkenalkan sifat aljabar dari bilangan riil. Untuk bilangan riil, diketahui bahwa penjumlahan dan perkalian bilangan riil bersifat komutatif dan asosiatif, yaitu untuk sembarang bilangan riil a , b , dan c berlaku

$$a + b = b + a$$

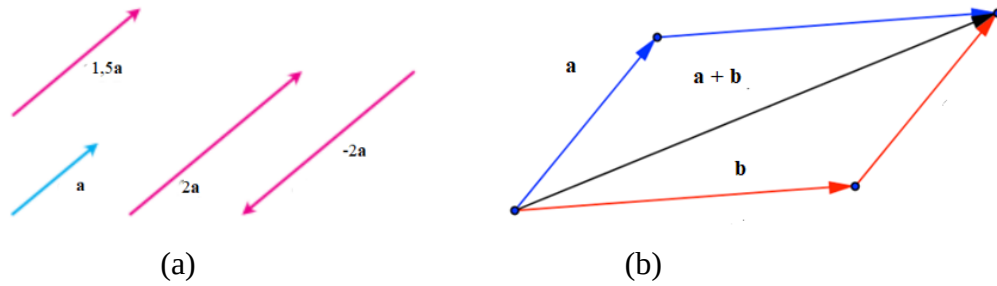
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Selain itu, bilangan riil juga memenuhi sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c).$$

Bilangan riil dapat digambarkan sebagai titik pada garis bilangan.

Pada ruang Euclid berdimensi dua dan tiga, dikenal segmen garis berarah, yang bernama vektor. Sebuah vektor dapat dikalikan dengan skalar; dan dua vektor dapat dijumlahkan, seperti diilustrasikan pada Gambar 1 berikut ini.



Gambar 1. (a) Perkalian Skalar pada Vektor; (b) Penjumlahan Vektor.

Adanya perkalian skalar dengan vektor ini memungkinkan vektor-vektor pada ruang Euclid berdimensi dua maupun tiga dinyatakan sebagai kombinasi linier dari basis vektor ortonormal. Di ruang Euclid berdimensi dua, vektor basis ortonormal dinyatakan dengan $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ sehingga vektor posisi $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ dapat dinyatakan sebagai $\mathbf{a} = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2$. Sementara itu, basis ortonormal pada ruang Euclid berdimensi tiga diberikan oleh $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Dengan demikian, vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dapat dinyatakan sebagai $\mathbf{a} = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3$.

Selain operasi skalar dengan vektor, pada ruang Euclid berdimensi dua dan tiga terdapat perkalian vektor dengan vektor. Salah satu bentuk perkalian vektor dengan vektor adalah hasil kali titik (*dot product*), yang juga disebut sebagai *inner product*. Hasil kali titik dari dua buah vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, diberikan oleh

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Hasil kali titik ini menghasilkan skalar sehingga hasil kali titik juga sering disebut hasil kali skalar. Untuk basis ortonormal $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, hasil kali titik dapat diringkas dalam bentuk *Kronecker delta* δ_{ij} , yaitu

$$\sigma_i \cdot \sigma_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \neq j \\ 0, & \text{jika } i = j \end{cases}$$

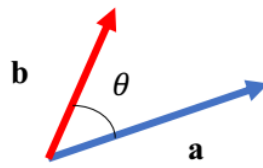
Hasil kali titik memenuhi sifat komutatif dan distributif

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \end{aligned}$$

Hasil kali titik juga dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta,$$

dan secara geometris diilustrasikan pada Gambar 2.



Gambar 2. Representasi Geometris dari $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

Telah diketahui bahwa hasil kali titik dari dua vektor menghasilkan skalar. Hal ini menimbulkan pertanyaan “Adakah hasil kali dua vektor yang menghasilkan vektor?” Salah satu hasil kali dua vektor yang menghasilkan vektor adalah hasil kali silang (*cross product*). Namun, hasil kali ini hanya berlaku di ruang Euclid berdimensi tiga. Misalkan dipunyai dua vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ di ruang Euclid berdimensi tiga, maka kedua vektor tersebut dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari basis vektor ortonormal $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, yaitu

$$\mathbf{a} = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3$$

$$\mathbf{b} = b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + b_3\sigma_3,$$

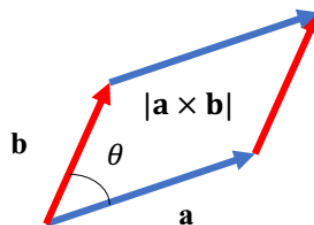
dan hasil kali silang kedua vektor diberikan oleh

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_1)\sigma_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\sigma_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\sigma_3.$$

Besarnya hasil kali vektor dinyatakan oleh

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta,$$

yang secara geometris menggambarkan luas jajaran genjang dengan sisi $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ (seperti yang diilustrasikan dalam Gambar 3). Arah $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ tegak lurus terhadap bidang dari $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ sehingga vektor $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, dan $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ membentuk sistem tangan kanan.



Gambar 3. Representasi Geometris dari $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$

Hasil kali silang bersifat anti-komutatif

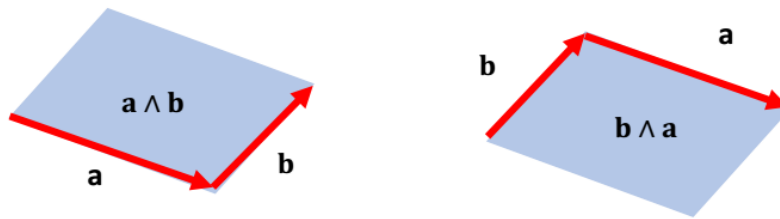
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

dan distributif

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}).$$

3. Outer Product

Hasil kali silang $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ mempunyai arah yang tegak lurus terhadap bidang dari $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ sehingga hasil kali silang hanya bisa dilakukan di ruang Euclid berdimensi tiga, dan tidak bisa dilakukan di ruang Euclid dengan dimensi dua atau dimensi yang lebih tinggi dari tiga. Oleh karena itu, diperlukan operasi lain untuk dua vektor di ruang Euclid berdimensi dua atau lebih yang hasilnya juga berupa vektor. Operasi tersebut antara lain adalah operasi *wedge*, yang dikenal juga dengan nama *outer product*. Operasi ini diperkenalkan oleh Grassman (1845). *Outer product* dari vektor $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ dituliskan sebagai $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ dan disebut bivektor. Secara geometris, nilai absolut dari bivektor, yaitu $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|$ merupakan luas jajaran genjang (di bidang) yang dilingkupi oleh $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$. Bivektor $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ mempunyai arah positif (berlawanan arah dengan arah jarum jam), sedangkan bivektor $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ mempunyai arah negatif (searah dengan arah jarum jam) seperti ditunjukkan oleh Gambar 4.



Gambar 4. Representasi Geometris dari Bivektor $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ dan $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$.

Seperti halnya dengan hasil kali silang, *outer product* juga memenuhi sifat anti-komutatif

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a})$$

dan sifat distributif

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}).$$

Untuk basis vektor ortonormal σ_1 dan σ_2 dipunyai

$$\sigma_1 \wedge \sigma_2 = \sigma_2 \wedge \sigma_1 = \mathbf{0}$$

$$\sigma_1 \wedge \sigma_2 = -\sigma_2 \wedge \sigma_1.$$

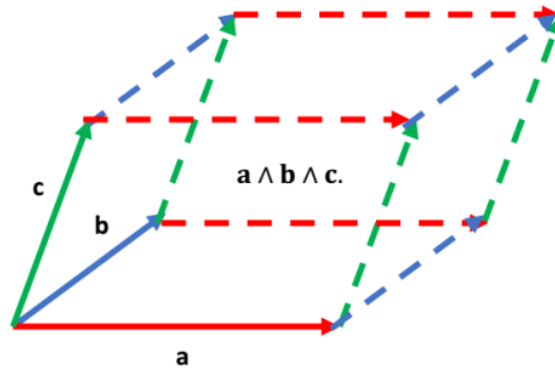
Jadi, untuk sembarang vektor $\mathbf{a} = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2$ dan $\mathbf{b} = b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2$, diperoleh

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_1 \boldsymbol{\sigma}_1 + a_2 \boldsymbol{\sigma}_2) \wedge (b_1 \boldsymbol{\sigma}_1 + b_2 \boldsymbol{\sigma}_2) = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \boldsymbol{\sigma}_1 \wedge \boldsymbol{\sigma}_2$$

dan

$$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|.$$

Salah satu keuntungan utama dari *outer product* adalah *outer product* dapat digeneralisasi dari ruang Euclid berdimensi dua ke ruang Euclid dengan dimensi yang lebih tinggi dari dua. Di ruang Euclid berdimensi tiga, *outer product* dari $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, dan $\mathbf{c}$ dinyatakan oleh $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ (yang disebut trivektor); dan ekstensi dari *outer product* di ruang Euclid berdimensi n dinamakan *blade*. Secara geometris, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ menyatakan paralelepipedum berarah, dan $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}|$ merepresentasikan volume paralelepipedum, seperti yang diilustrasikan oleh Gambar 5.



Gambar 5. Representasi Geometris dari Trivektor $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$.

Perlu diketahui bahwa

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c},$$

yang menunjukkan bahwa *outer product* juga bersifat asosiatif.

Sejauh ini, diketahui bahwa penjumlahan hanya dilakukan antar bilangan riil atau antar vektor atau antar bivektor atau antar trivektor atau antar *blade*. Akan tetapi, sebenarnya tidaklah harus selalu demikian. Di ruang Euclid berdimensi n , dapat dilakukan penjumlahan bilangan riil (skalar) bersama dengan vektor, bivektor, trivektor, maupun *blade*, yaitu

$$A = a + (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) + (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3) + \cdots + (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_n).$$

Jumlahan ini dikenal dengan nama *multivector* atau *clif*. Sebagai contoh, jika dipunyai *multivector*

$$S_1 = a_1 + \mathbf{b}_1 + (\mathbf{c}_1 \wedge \mathbf{d}_1)$$

$$S_2 = a_2 + \mathbf{b}_2 + (\mathbf{c}_2 \wedge \mathbf{d}_2),$$

maka

$$S_1 \wedge S_2 = a_1 a_2 + a_1 \mathbf{b}_2 + a_2 \mathbf{b}_1 + (\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{c}_2 \wedge \mathbf{d}_2) + (\mathbf{c}_1 \wedge \mathbf{d}_1 \wedge \mathbf{b}_2) + (\mathbf{c}_1 \wedge \mathbf{d}_1 \wedge \mathbf{c}_2 \wedge \mathbf{d}_2).$$

Hal ini dikarenakan

$$\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_2 \wedge \mathbf{b}_1 = \mathbf{0}.$$

4. *Geometric Product* dan Aljabar Geometri

Keberadaan *multivector* memunculkan cabang ilmu Matematika yang dikenal dengan nama Aljabar Geometri. Aljabar Geometri, yang juga dikenal dengan nama Aljabar Clifford, adalah aljabar bertingkat (*graded algebra*), yang anggotanya adalah *multivector*. Pada Aljabar Geometri, tingkat dari masing-masing elemen penyusun *multivector* adalah sebagai berikut. Elemen tingkat-0 adalah skalar (yang direpresentasikan dengan titik), elemen tingkat-1 adalah vektor (yang direpresentasikan dengan segmen garis berarah), elemen tingkat-2 adalah bivektor (yang direpresentasikan dengan jajaran genjang), elemen tingkat-3 adalah trivektor (yang direpresentasikan dengan paralelepipedum), dan elemen tingkat- n (di ruang Euclid berdimensi- n) adalah *blade*.

Pada Aljabar Geometri, Clifford (1873) mendefinisikan *geometric product* dari vektor $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ sebagai

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}.$$

Geometric product memenuhi sifat-sifat asosiatif dan distributif

$$(\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{bc})$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$$

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{a} = \mathbf{ba} + \mathbf{ca}$$

Sifat komutatif hanya dipenuhi jika kedua vektor sejajar; dan sifat anti-komutatif hanya dipenuhi jika kedua vektor tegak lurus. Selanjutnya,

$$\mathbf{ab} + \mathbf{ba} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 - \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2$$

sehingga *inner product* dan *outer product* pada *geometric product*

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba})$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}).$$

Definisi *inner product* dan *outer product* ini dapat diperluas ke *geometric product* dari vektor $\mathbf{a}$ dengan *multivector* tingkat- r , yaitu B_r . *Geometric product* ini dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{a}B_r = \mathbf{a} \cdot B_r + \mathbf{a} \wedge B_r$$

dengan

$$\mathbf{a} \cdot B_r = \frac{1}{2}(\mathbf{a}B_r - (-1)^r B_r \mathbf{a})$$

$$\mathbf{a} \wedge B_r = \frac{1}{2}(\mathbf{a}B_r + (-1)^r B_r \mathbf{a}).$$

Selanjutnya, sembarang *multivector* dapat diekspansi dalam basis

$$1, \{\sigma_1\}, \{\sigma_2 \wedge \sigma_2\}, \{\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3\}, \dots, \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \dots \wedge \sigma_n \equiv \mathbf{I}.$$

Dalam hal ini, $\mathbf{I}$ dinamakan *pseudoscalar*. Dengan ekspansi ini, penjumlahan dan *geometric product* dapat dirumuskan dengan lebih mudah. Sebagai contoh, penjumlahan dari

$$A = a_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_1 \wedge \sigma_2$$

$$B = b_0 + b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + b_3\sigma_1 \wedge \sigma_2$$

diberikan oleh

$$A + B = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\sigma_1 + (a_2 + b_2)\sigma_2 + (a_3 + b_3)\sigma_1 \wedge \sigma_2$$

$$AB = p_0 + p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2 + p_3\sigma_1 \wedge \sigma_2$$

dengan

$$p_0 = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3$$

$$p_1 = a_0b_0 + a_1b_0 + a_3b_2 - a_2b_3$$

$$p_2 = a_0b_2 + a_2b_0 + a_1b_3 - a_3b_1$$

$$p_3 = a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1$$

Selanjutnya, $\sigma_1 \wedge \sigma_2 = \sigma_1\sigma_2 = 1$ dan $(\sigma_1 \wedge \sigma_2)^2 = (\sigma_1\sigma_2)^2 = -1$. Lebih jauh, $\sigma_1 \wedge \sigma_2$ mempunyai efek geometri rotasi 90° dari kiri ke kanan di bidang untuk vektor $\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Dengan demikian, untuk sembarang vektor $\mathbf{r} = x + y\sigma_1$ dapat dibentuk *multivector*

$$Z \equiv \sigma_1\mathbf{r} = x + \mathbf{I}y$$

dengan $\mathbf{I} = \sigma_1 \sigma_2$. Ini menunjukkan adanya ekuivalensi dengan bilangan kompleks yang pada ruang Euclid berdimensi dua diinterpretasikan dalam diagram Argand. Sebenarnya, Hamilton pada tahun 1843 telah berusaha memperluas bilangan kompleks ke ruang Euclid berdimensi tiga. Namun, perluasan ini tidak berhasil dilakukan. Yang dapat dilakukan adalah perluasan bilangan kompleks ke ruang Euclid berdimensi empat. Dengan adanya *pseudoscalar* pada Aljabar Geometri, bilangan kompleks tidak hanya dapat diperluas ke ruang Euclid berdimensi empat, tetapi juga dapat diperluas ke ruang Euclid berdimensi tiga atau lebih. Seperti diketahui bahwa bagian imajiner dari bilangan kompleks dapat diinterpretasikan sebagai rotasi pada bidang tertentu. Ini menjadikan Geometri Aljabar menjadi salah satu piranti Matematika yang ampuh ini untuk menyatukan berbagai bahasa dalam Fisika dari waktu ke waktu, seperti yang dapat dilihat pada Doran dan Lasenby (2003), Sugon dan McNamara (2004), serta Daviau dan Bertrand (2016). Sebagai contoh, dalam persamaan Dirac, skalar imajiner dapat digantikan dengan besaran yang dapat diinterpretasikan sebagai rotasi pada bidang tertentu. Ini memperjelas penggambaran dari penguraian efek geometri dan kuantum. Aljabar Geometri juga menjadi piranti dalam fisika teori seperti teori gauge untuk gravitasi, *black hole* dan radiasi Hawking (Setiawan, 2000).

5. Penutup

Di luar bidang Fisika, bidang lain seperti robotik, *signal processing*, visualisasi komputer, *vector field processing*, dan *neural computing* juga membutuhkan Aljabar Geometri sebagai piranti (Hitzer, 2011). Dengan fleksibilitas dan kemampuan yang mencakup multi dimensi, menjadikan Aljabar Geometri sebagai bahasa matematika universal yang menjanjikan untuk pengembangan bidang sains di masa kini dan masa mendatang.

Daftar Pustaka

- Clifford, W. K. (1878). Applications of Grassmann's Extensive Algebra. *Am. J. Math.* **4**: 350–358.
- Doran, C. & Lasenby, A. (2003). *Geometry Algebra for Physicists.*, Cambridge: Cambridge University Press
- Hitzer, E. (2011). Introduction to Clifford's Geometric Algebra. *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration.* **4**(1): 001–011.
- Lasenby, A. N. (2019). Geometric Algebra, Gravity, and Gravitational Waves. *Adv. Appld. Clifford Algebras.* **29**(79).
- Laurinolli, T. (2016). *What is Geometric Algebra?* Note for Galois^{1WEW} club, Finland.
- Setiawan, S. (2000). *Applications of Geometric Algebra to Black Holes*, Ph.D. Thesis, University of Cambridge, UK.
- Sugon, Jr., Q. M. & McNamara, D. J. (2004). A Geometric Algebra for Four Kinds of Interactions. *Jour. Nod. Phys.* **7**: 92–951.

KONSTANTA DIELEKTRIK DAN RUGI DIELEKTRIK SERBUK KITOSAN DENGAN VARIASI WAKTU MILLING

Kartika Sari^{1,*}, Sunardi¹, Wihantoro¹, Aris Haryadi¹, Agung Bambang Setio Utomo², Parmin Lumban Toruan³, Evi Yulianti⁴ dan Mashadi⁴

¹Jurusan Fisika FMIPA Universitas Jenderal Soedirman Purwoketo53123

²Departemen Fisika FMIPA Universitas Gadjah Mada Yogyakarta55281

³Jurusan Fisika FST Universitas PGRI Palembang 30252

⁴PSTBM Badan Tenaga Atom Nasional Serpong Indonesia15314

^{*}Email : Kartika.sari@unsoed.ac.id

Abstrak. Sintesis serbuk kitosan dengan variasi waktu milling 120 menit (CH120) dan 240 menit (CH240) dilakukan untuk menentukan konstanta dielektrik dan rugi dielektrik menggunakan *mechanical milling*. Pengujian sifat dielektrik menggunakan *Electrochemical Impedance Spectroscopy* (EIS) dan pengujian struktur morfologi permukaan menggunakan *Scanning Electron Microscopy* (SEM). Hasil SEM menunjukkan bahwa ukuran butiran CH120 dan CH240 berbentuk tidak teratur dan berkurang dengan bertambahnya waktu milling. Salah satu penyebabnya adalah terjadinya aglomerasi pada saat proses milling. Hasil EIS menunjukkan konstanta dielektrik dan rugi dielektrik tertinggi untuk serbuk kitosan hasil milling CH240 adalah $1,46 \times 10^2$ F/m dan $7,3 \times 10^2$ F/m. Hal ini disebabkan adanya pengaruh medan listrik luar yang berpengaruh terhadap perpindahan elektron. Nilai konstanta dielektrik dan rugi dielektrik serbuk kitosan CH240 lebih konduktif dibandingkan dengan serbuk kitosan CH0 dan CH120.

Kata Kunci: konstanta dielektrik, rugi dielektrik, serbuk, kitosan, waktu milling.

1. Pendahuluan

Biopolimer organik yang sedang dikembangkan untuk penelitian bidang energi adalah kitosan [C₆H₁₁NO₄]₆. Kitosan memiliki sifat non-toksik, biodegradabel, biokompatibel dan hidrofilik (Nabok, 2000). Kitosan memiliki gugus fungsi amina dan hidroksil sehingga mudah untuk dimodifikasikan dengan material kimia lainnya (Abdullah dkk., 2009 ; Kartika dkk., 2020; Arof dkk., 1999). Kitosan memiliki konduktivitas ionik rendah disebabkan adanya ikatan atom hidrogen yang kuat pada monomernya sehingga tidak dapat berpindah. Konduktivitas kitosan dipengaruhi oleh ukuran partikel (Dey dkk., 2011). Ukuran partikel yang kecil merupakan salah satu faktor kitosan mudah bermodifikasi (Lin dkk., 2015). Salah satu metode yang digunakan untuk membuat ukuran partikel menjadi lebih kecil tanpa melalui reaksi kimia dalam proses sintesis serbuk kitosan adalah *mechanical milling* (Firmasari dkk., 2016).

Mechanical milling adalah salah satu teknik pembuatan material yang dapat menghasilkan serbuk yang sangat halus hingga berukuran nanometer. Proses *mechanical milling* terjadi deformasi berulang yang disebabkan adanya tumbukan antara sampel dan bola logam dalam vial (Wigayati dan Purawiardi, 2015). Permukaan partikel sampel terjadi *aglomerasi* atau proses bergabungnya partikel-partikel kecil menjadi struktur yang lebih besar melalui mekanisme pengikatan fisis (Firmansari dkk., 2016). Hasil penelitian tentang sintesis serbuk kitosan dengan metode milling yang telah dilakukan menunjukkan bahwa semakin lama waktu milling tidak otomatis menghasilkan ukuran butiran kitosan mengecil. Hal ini disebabkan serbuk kitosan akan beraglomerasi dalam jar selama proses milling berlangsung dan relatif meningkat nilai konstanta dielektrik kitosan (Sari dkk., 2020). Sifat dielektrik menunjukkan mekanisme konduksi ion antara elektroda dan elektrolit untuk devais elektrokimia (Navaratman dkk., 2015) (Shukur dkk., 2014).

Penelitian-penelitian tentang sintesis serbuk kitosan dengan waktu milling yang sudah dilakukan tersebut menunjukkan bahwa metode milling merupakan salah satu metode sangat sederhana, biaya rendah dan menghasilkan luas permukaan besar. Hal yang menarik untuk dikaji adalah ukuran partikel lebih kecil dan ukuran butiran berkurang. Penelitian ini menggunakan serbuk kitosan dengan variasi waktu milling untuk menentukan nilai konstanta dielektrik dan rugi dielektrik sebagai informasi awal dalam pembuatan membran polimer elektrolit padat baterai sekunder.

2. Metode Penelitian

a. Bahan dan alat yang digunakan

Bahan yang digunakan dalam penelitian ini adalah serbuk kitosan (DD 85%) (Biotech Surindo). Variasi waktu milling serbuk kitosan yang digunakan 120 menit (CH60) dan 240 menit (CH360).

b. Prosedur penelitian

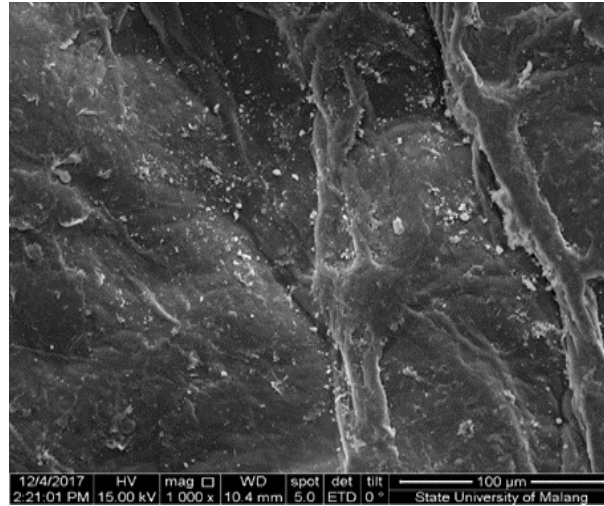
Preparasi serbuk kitosan dengan variasi waktu milling menggunakan HEM tipe 8000M SPEX Certiprep Mixer/Mill. Diameter bola yang digunakan 0,5 mm. Ratio perbandingan bola dengan berat serbuk kitosan 3 : 2. Kecepatan milling yang digunakan konstan.

c. Karakterisasi serbuk kitosan

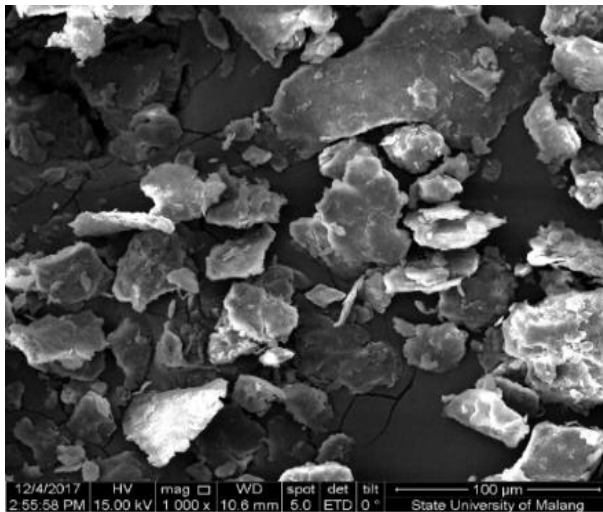
Konstanta dielektrik dan rugi dielektrik serbuk kitosan hasil milling diukur menggunakan *Electrochemical Impedance Spectroscopy* (EIS) dari Hioki LCR-meter tipe HiTESTER 3532-50 pada tegangan 1,5 V dengan frekuensi 40 Hz – 5 MHz. Bentuk sampel berupa pellet dan dilapisi dengan larutan perak yang bertujuan agar pellet bersifat lebih konduktif. Ukuran dan distribusi butiran serbuk kitosan menggunakan Scanning Electron Microscopy (SEM) tipe JEOL, JSM-6510LA dengan pembesaran 1000x.

3. Hasil Dan Pembahasan

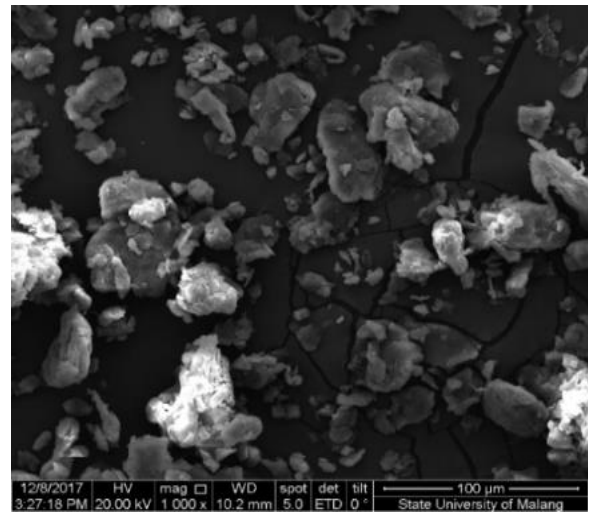
Hasil citra SEM dapat dilihat pada Gambar 1 (a), (b) dan (c). Gambar 1(a) merupakan struktur permukaan serbuk kitosan tanpa dimilling (CH0). Ukuran butiran tidak dapat teramati disebabkan ukuran butiran masih saling berikatan satu sama lainnya. Gambar 1(b) dan (c) merupakan serbuk kitosan hasil milling dengan variasi 120 menit (CH120) dan 240 menit (CH240). Dari kedua gambar tersebut menunjukkan perubahan luas permukaan, ukuran butiran dan terbentuknya agglomerasi pada serbuk kitosan hasil milling.



(a) Serbuk Kitosan murni (CH0)



(b) CH120



(c) CH240

Gambar 1. Citra SEM Serbuk Kitosan (a) tanpa Dimilling, (b) Waktu Milling 120 Menit, dan (c) Waktu Milling 240 Menit

Ukuran butiran CH120 dan CH240 berbentuk tidak teratur dan berkurang dengan bertambahnya waktu milling. Luas permukaan yang teramati juga berkurang secara signifikan pada serbuk kitosan CH240. Adanya pengaruh aglomerasi dan terbentuk banyaknya rongga pada permukaan sehingga menyebabkan perubahan dalam struktur internal butiran kitosan hasil milling.

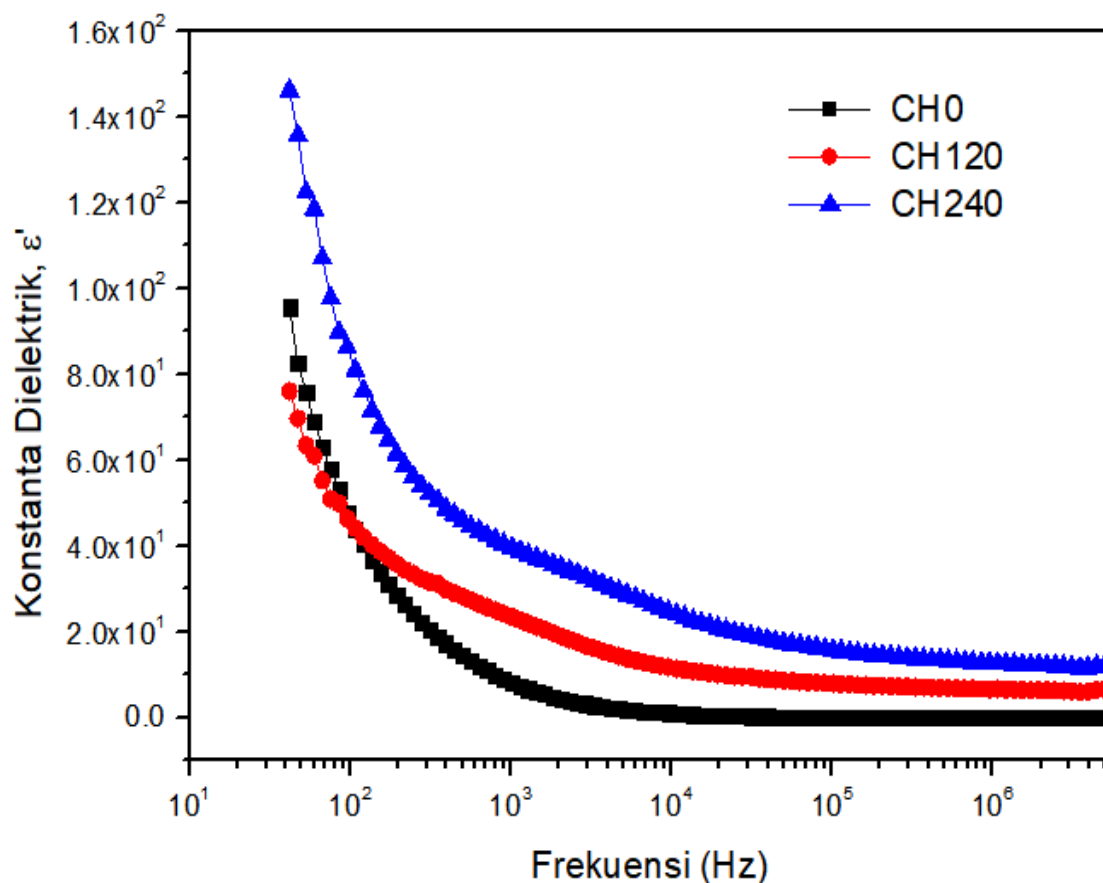
Hasil pengujian *Electrochemical Impedance Spectroscopy* (EIS) dapat dilihat pada Gambar 2 dan Gambar 3. Nilai konstanta dielektrik dan rugi dielektrik diperoleh menggunakan persamaan (Navaratnam dkk., 2015) :

$$\varepsilon' = \frac{Z_r}{\omega C_0(Z_r^2 + Z_i^2)} \quad (1)$$

$$\varepsilon'' = \frac{Z_i}{\omega C_0(Z_r^2 + Z_i^2)} \quad (2)$$

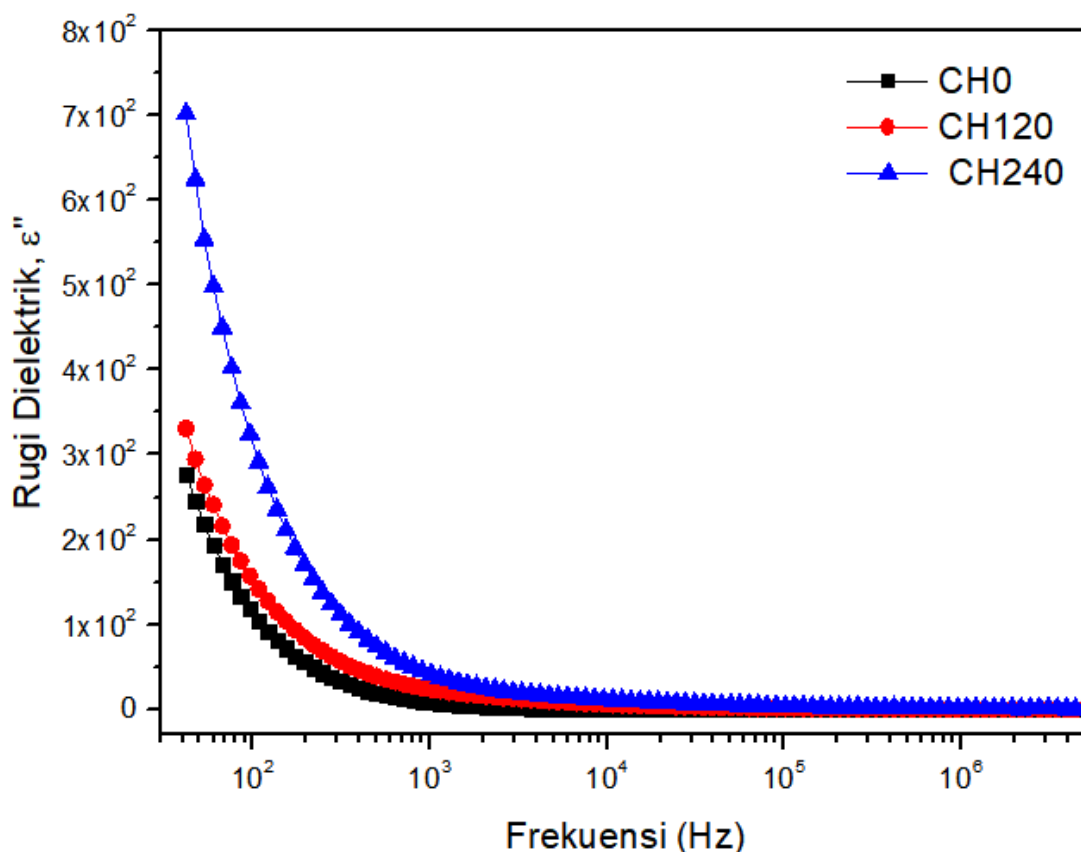
dengan $C_o = \varepsilon_o \frac{A}{t}$ (ε_o adalah permitivitas ruang hampa), A , t adalah luas permukaan dan tebal pellet, $\omega = 2\pi f$ (f adalah frekuensi), Z_i adalah bagian imajiner permitivitas kompleks, Z_r is bagian real dari permitivitas kompleks, ε' adalah konstanta dielektrik dan ε'' adalah rugi dielektrik.

Gambar 2 menunjukkan grafik konstanta dielektrik serbuk kitosan tanpa dimilling (CH0), waktu milling 120 menit (CH120) dan 240 menit (CH240). Nilai konstanta dielektrik tertinggi pada frekuensi 50 Hz terjadi pada CH240 sekitar $1,46 \times 10^2$ F/m dan terendah pada CH120 sekitar 76 F/m. Pada frekuensi sekitar 1000 Hz, nilai konstanta dielektrik menurun dan pada frekuensi tinggi, nilai konstanta dielektrik mencapai konstan. Hal ini disebabkan oleh terjadinya tidak ada getaran lagi dipole akibat medan listrik (Kumar dkk., 2011).



Gambar 2. Grafik Konstanta Dielektrik Serbuk Kitosan tanpa Dimilling (CH0), Waktu Milling 120 Menit (CH120) dan 240 Menit (CH240)

Grafik rugi dielektrik dapat dilihat pada Gambar 3. Nilai rugi dielektrik paling tinggi pada frekuensi 50 Hz terjadi pada CH240 sekitar $7,3 \times 10^2$ F/m dan terendah pada CH0 sekitar 29 F/m. Dan menurun pada frekuensi 1000 Hz dan konstan pada frekuensi tinggi. Hal ini disebabkan oleh pergerakan ion dalam material (Nithya dkk., 2012)



Gambar 3. Grafik Rugi Dielektrik Serbuk Kitosan tanpa Dimilling (CH0), Waktu Milling 120 Menit (CH120) dan 240 Menit (CH240)

Penurunan nilai konstanta dielektrik dan rugi dielektrik dapat disebabkan oleh pengaruh kemampuan berpolarisasi material. Polarisasi berhubungan dengan perpindahan elektron sebagai fungsi frekuensi. Perpindahan elektron dipengaruhi adanya medan listrik dari luar.

4. Kesimpulan

Serbuk kitosan dengan variasi waktu milling 120 dan 240 menit untuk aplikasi pada baterai sekunder telah berhasil dibuat. Hasil pengujian *Electrochemical Impedance Spectroscopy* (EIS) menunjukkan terjadinya penurunan nilai konstanta dielektrik dan rugi dielektrik pada frekuensi di atas 1000 Hz. Pada frekuensi rendah sekitar 50 Hz, nilai konstanta dielektrik dan rugi dielektrik relatif tinggi.

Ucapan Terimakasih

Terima kasih kepada Kementerian Riset/BRIN melalui Universitas Jenderal Soedirman melalui pendanaan BLU Skim Riset Peningkatan Kompetensi Tahun 2020.

Daftar Pustaka

- Abdullah, M. (2009). *Pengantar Nanosains*. Bandung: Penerbit ITB.
- Arof, A.K. (1999). Chitosan-Lithium Triflate Electrolyte in Secondary Lithium Cells. *Journal of Power Source*. 77: 42-48.

- Dey, A., Karan, S., and De, S.K. (2011). Structure, Morphology, and Ionic Conductivity of Solid Polymer Electrolyte. *Materials Research Bulletin*. **46**(11): 2009 – 2015.
- Firmasari, V., Ratnawulan, Ramli, Fauzi, A. (2016). Pengaruh Waktu Milling Terhadap Ukuran Butir Forsterite (Mg_2SiO_4) dari Batuan Dunit di Daerah Jorong Tongar Nagari Aur Kuning, Kabupaten Pasaman Barat. *Pillar of Physics*. **8**: 89-86.
- Kumar, M. (2011). A Review of Chitin and Chitosan Application. *Journal of Reactive and Functional Polymer*. **46**(3).
- Lin, H., Qin, L., Hong, H., and Lin, Q. (2015). Preparation of Starch Nanoparticles via High-Energy Ball Milling. *Journal of Nano Research*. **40**: 174-179.
- Nabok, A. (2000). *Organic and Inorganic Nanostructure: Nanotechnology Series*. Artech House.
- Navaratnam, S., Ramesh. K, Ramesh. S, Sanusi. A, Basirun. W.J. and Arof, A.K. (2015). Transport Mechanism Studies of Chitosan Electrolyte Systems. *Electromica Acta*. **175**: 68-73.
- Nithya, H., Selvasekarapandian, S., Christopher, P., Kumar, D.A., and Kawamura, J. (2012). Effect of Propylene Carbonate and Dimethylformamide on Ionic Conductivity of P(ECH-EO) Based Polymer Electrolyte. *Electrochim Acta*. **66**: 110-120.
- S. Kartika, BSU.Agung, A. Kamsul, Roto, K. Evvy, Y. Evi, dan E. Suharyadi. (2020). Effect of Milling Time on the Microstructure and Dielectric Properties of Chitosan Nanopowder. *International Journal of Nanoelectronic and Materials*. **13**: 1-8.
- Shukur, M.F., Ithnin, R., and Kadir, M.F.Z. (2011). Protonic Transport Analysis of Starch-Chitosan Blend Based Electrolytes and Application in Electrochemical Device. *Molecul Crystal Liquid Crystal*. **603**: 52-65.
- Wigayati, E. W., dan Purawiardi, R. I. (2015). Analisis pengaruh Mechanical Milling Menggunakan Planetary Ball Milling Terhadap Struktur Mikro Senyawa LiBOB. *Jurnal Sains Materi Indonesia*. **16**(3): 126-132.

BIOGRAFI SINGKAT PENULIS



| Agus Sugandha, M.Si. |

Agus Sugandha adalah dosen Matematika FMIPA Unsoed Purwokerto. Berkarir sebagai dosen sejak 2006. Menyelesaikan pendidikan S1 di Jurusan Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Yogyakarta dan S2 di Jurusan Matematika, Universitas Gadjah Mada. Bidang keahlian adalah Teori Bilangan dan Teori Ergodik. Aktif dalam penelitian, pengabdian, seminar dan publikasi. Catatan publikasi artikel terindeks Scopus sebanyak tujuh dengan lima diantaranya dalam Teori Bilangan khususnya Persamaan Diophantin Non-Linier. Dapat dihubungi melalui email: agussugandha1974@gmail.com.



| Agung Prabowo, S.Si., M.Si. |

Agung Prabowo adalah dosen Matematika FMIPA Unsoed Purwokerto. Lahir di Gombong, Kebumen pada 23 Februari 1971. Diangkat sebagai CPNS Unsoed pada tahun 2005 dengan bergabung di Fakultas Pertanian. Diangkat sebagai PNS pada tahun 2006 juga pada Fakultas Pertanian hingga akhirnya hijrah dan bergabung dengan FMIPA seiring dengan berdirinya FMIPA pada tahun 2014. Menyelesaikan pendidikan sebagai Sarjana pada Jurusan Matematika, FMIPA ITB tahun 1998 dan Magister pada Program Studi Sains Aktuaria, FMIPA ITB tahun 2001. Pernah menempuh pendidikan doctoral di Program Pascasarjana Universitas Pendidikan Indonesia (UPI) Bandung pada Jurusan Pendidikan Matematika. Saat ini tercatat sebagai mahasiswa doctoral di Universitas Sultan Zainal Abidin, Malaysia. Hingga saat ini telah menerbitkan 18 buah buku, satu di antaranya adalah *The Paku Buwono Code*. Salah satu prestasi puncaknya adalah meraih Unsoed Award 2016 dalam Bidang Pengembangan Pembelajaran pada Dies Natalis Unsoed ke-53. Prestasi lainnya adalah menjadi salah satu peraih Hibah Buku Teks DIKTI pada tahun 2013, peraih Hibah Buku Ajar DIKTI pada tahun 2015, dan pembimbing PIMNAS (Pekan Ilmiah Mahasiswa Nasional tahun 2016 di IPB). Dalam kajian Matematika Jawa, penulis berhasil mempublikasikan 10 (sepuluh) buah artikel terindeks scopus, disamping 19 (sembilan belas) artikel dalam bidang matematika lainnya yang juga terindeks scopus. Beberapa karyanya yang dianggapnya cukup monumental didaftarkan hak ciptanya sehingga terkumpul sebanyak 4 (empat) buah hak cipta. Dapat dihubungi melalui email: agung_nghp@yahoo.com atau agung.prabowo@unsoed.ac.id.



| Sehah, S.Si., M.Si. |

Sehah, lahir Kabupaten Rembang Jawa Tengah, 06 Agustus 1971. Penulis pernah menempuh pendidikan formal di MI Annashriyyah lulus tahun 1984; SMP Negeri Lasem lulus tahun 1987; dan SMA Negeri Lasem lulus tahun 1990. Selepas SMA, penulis melanjutkan kuliah pada Program Studi S1 Fisika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro Semarang, lulus tahun 1997. Setahun kemudian, penulis melanjutkan kuliah pada Program Magister S2 Fisika dengan konsentrasi bidang Fisika Bumi di Universitas Gadjah Mada Yogyakarta, lulus tahun 2001. Saat ini penulis berprofesi sebagai dosen pada Program Studi S1 Fisika Fakultas MIPA Universitas Jenderal Soedirman Purwokerto, dan mengajar beberapa matakuliah seperti Gravitasi dan Geomagnet, Seismologi, Eksplorasi Geotermal, Workshop Geofisika, dan Kapita Selekta Geofisika. Selain mengajar, penulis juga aktif melakukan penelitian pada bidang Fisika Bumi atau Geofisika, antara lain:

1. Estimasi Sebaran Bitumen Batubara di Cekungan Bentarsari Kabupaten Brebes Jawa Tengah Berdasarkan Data Anomali Geomagnetik, tahun 2014.
2. Interpretasi Model Struktur Batuan Bawah Permukaan di Kawasan Pantai Widarapayung Kabupaten Cilacap Berdasarkan Data Anomali Magnetik, tahun 2016.
3. Eksplorasi Geofisika Metode Magnetik dan Geolistrik untuk Menginvestigasi Potensi Bijih Besi dan Dampak Eksploitasinya di Kawasan Pesisir Kabupaten Cilacap (Studi Kasus: Kawasan Pesisir Kecamatan Binangun dan Kecamatan Nusawungu, Kabupaten Cilacap, Jawa Tengah), tahun 2017-2018.
4. Penggambaran Pseudosection Sistem Hidrogeologi Pantai Berdasarkan Survei Geolistrik Resistivitas 2D Konfigurasi Wenner, tahun 2018.
5. Pemetaan Sebaran dan Potensi Batuan Andesit Berdasarkan Data Anomali Magnetik Lokal di Desa Candiwulan dan Desa Karangcegak Kecamatan Kutasari Kabupaten Purbalingga Jawa Tengah, tahun 2019.

Dapat dihubungi melalui email: sehah.geophysics@gmail.com.



| Dr. Jajang, S.Si., M.Si. |

Jajang, lahir di Tasikmalaya, pada 2 Juli 1972. Penulis menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Statistika IPB, 1997 dan S2 Magister Sains Statistika IPB, 2004, dan Program Doktor Statistika IPB 2014. Saat ini berprofesi sebagai dosen peneliti bidang statistika, penulis beberapa jurnal internasional berkaitan dengan pemodelan data spasial. Beberapa artikel jurnal statistik spasial telah dipublikasi di *Far East Journal of Mathematics Science* dan *International Journal of Advanced Science and Technology*. Beberapa buku yang telah dihasilkan antara Statistika Elementer dan Analisa Regresi Terapan. Pengalaman penulis dalam kegiatan terkait di bidang akademik lainnya adalah *reviewer* beberapa konferensi nasional dan internasional (*UAD Conference*). Dapat dihubungi melalui email: rzjajangstk@gmail.com



| Dr. Kartika Sari, S.Si., M.Si. |

Kartika Sari, lahir di Jebus, Bangka Barat, 15 Juni 1971. Penulis menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Fisika FMIPA UNSRI tahun 1995, S2 Magister Sains Fisika FMIPA UGM tahun 2001, dan Program Doktor Fisika Departemen Fisika FMIPA UGM tahun 2020. Saat ini berprofesi sebagai dosen peneliti di bidang material baterai sekunder. Diangkat sebagai CPNS UNS tahun 1997 di Jurusan Fisika FMIPA UNS. Diangkat sebagai PNS tahun 1998 di Jurusan Fisika FMIPA UNS dan tahun 2008 hingga sekarang bergabung di Jurusan Fisika FMIPA Unsoed. Penulis aktif sebagai pengurus di organisasi PSI DIY-Jawa Tengah. Aktif sebagai *reviewer* di Seminar Internasional Komunitas Baterai. Artikel hasil penelitian telah di publikasi di jurnal *Material Science Forum* dan *International Journal of Nanoelectronics and Materials*. Dapat dihubungi melalui email: tikasari1571@gmail.com atau kartika.sari@unsoed.ac.id.



| **Wihantoro, S.Si., M.Si.** |

Wihantoro, lahir di Semarang, pada 5 September 1970. Penulis menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Fisika UNDIP, 1994 dan S2 *Medical Physics* - Universitas Exeter Inggris, 2003. Saat ini berprofesi sebagai dosen peneliti bidang fisika medis, menulis beberapa jurnal berkaitan dengan model perhitungan dosis radiasi. Artikel yang telah dipublikasi di *International Journal of Renewable Energy Development*. Pengalaman penulis dalam kegiatan terkait di bidang akademik lainnya adalah menjadi editor di Jurnal Pengabdian Masyarakat SERAMBI ABDIMAS. Dapat dihubungi melalui email: wihantoro@unsoed.ac.id.



| **Aris Haryadi, S.Si., M.Si.** |

Aris Haryadi, lahir di Kebumen, Jawa Tengah, 28 Juni 1971. Penulis menyelesaikan pendidikan S1 pada jurusan Fisika FMIPA UNDIP tahun 1997 dan S2 Magister Sains Fisika FMIPA ITB tahun 2003, Saat ini berprofesi sebagai dosen peneliti di bidang Fisika Medik . Diangkat sebagai CPNS UNSOED tahun 1998 di Jurusan Fisika FMIPA UNSOED yang pada waktu itu masih UPT MIPA dan diangkat sebagai PNS tahun 1999. Penulis aktif sebagai anggota di organisasi PSI DIY-Jawa Tengah. Email : aris.haryadi@unsoed.ac.id.



| Dra. Evi Yulianti, M.Si. |

Evi Yulianti, lahir di Bukittinggi, Sumatera Barat, 20 Juli 1968. Penulis menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Kimia, FMIPA Universitas Indonesia tahun 1993, dan S2 Magister Sains Kimia FMIPA UI tahun 2008. Saat ini berprofesi sebagai peneliti bidang material polimer. Diangkat sebagai CPNS di BATAN tahun 1994 di Bidang Fisika Zat Mampat, Pusat Penelitian Sains Materi. Diangkat sebagai PNS tahun 1995 di Pusat Penelitian Sains Materi dan hingga sekarang aktif sebagai Peneliti Ahli Madya di Pusat Sains dan Teknologi Bahan Maju, BATAN. Penulis aktif sebagai anggota dan pengurus Himpunan Polimer Indonesia (HPI). Dapat dihubungi melalui email : evinazir4982@gmail.com atau yulianti@batan.go.id.



| Mashadi, M.Si. |

Mashadi, lahir di Pati, Jawa Tengah, 23 Maret 1971. Penulis menyelesaikan pendidikan S1 pada Fakultas Teknik, jurusan Teknik Elektro Universitas Indonesia tahun 2000, S2 Magister Sains Fisika Instrumentasi FMIPA Universitas Indonesia tahun 2011. Saat ini berprofesi sebagai peneliti di bidang Material di Pusat Sains dan Teknologi Bahan Maju - Badan Tenaga Nuklir Nasional (PSTBM-BATAN). Penelitian yang pernah dilakukan: Bahan Magnetoresistance, Bahan Sensor Nano Komposit, Pengembangan Bahan GMR untuk biosensor dan Penelitian Bahan Smart Magnetik sebagai cat anti RADAR. Diangkat sebagai CPNS BATAN tahun 1995 dan diangkat sebagai PNS tahun 1996 hingga sekarang, bergabung di Pusat Sains dan Teknologi Bahan Maju - Badan Tenaga Nuklir Nasional (PSTBM-BATAN). Artikel hasil penelitian telah di publikasi di jurnal *Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences*, *Jurnal Teknologi (JT) Malaysia*, *Key Engineering Materials*, *Journal of ELECTRONIC MATERIALS* dan *Advanced Material letter*. Dapat dihubungi melalui email: mashadi71@gmail.com atau mashadi@batan.go.id.



| Drs. Sandi Setiawan, M.A., PhD. |

Drs. Sandi Setiawan, M.A., PhD., lahir di Banyuwangi 10 Februari 1965. Lulus S1 dari Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya, S2 dan S3 dari University of Cambridge, England. Selama menempuh S2 dan S3 mendapatkan beasiswa antara lain dari British Chevening Award, Cambridge Overseas Trust, dan Cambridge University Board of Graduate Studies. Pernah menjadi anggota Royal of Astronomical Society dan Cambridge Philosophical Society. Saat ini menjadi Senior Vice President di public financial company di Amerika Serikat.



UNIVERSITAS JENDERAL SOEDIRMAN
Gd. UNSOED Press
Jalan Prof. Dr. H.R. Boenyamin 708 Purwokerto
Kode Pos 53122 Kotak Pos 115
Telepon (0281) 626070
Email: unsoedpress@unsoed.ac.id

ISBN 978-623-6783-15-3

